



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria
de Telecomunicació de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

PROYECTO FINAL DE CARRERA

ESTUDIO TEÓRICO SOBRE EL USO DE LOS
PÚLSARES EN LA NAVEGACIÓN ESPACIAL

(THEORICAL STUDY ON THE USE OF
PULSARS IN SPACE NAVIGATION)

Estudis: Enginyeria de Telecomunicació

Autor: Gemma Cabañero López

Director/a: Josep Sala Alvarez

Any: 2011

LISTA DE CONTENIDOS

AGRADECIMIENTOS	7
RESUM DEL PROJECTE	8
RESUMEN DEL PROYECTO	8
ABSTRACT	10
1 INTRODUCCIÓN.....	11
1.1 OBJETIVO DEL PROYECTO	11
1.2 ESTRUCTURA DEL PROYECTO	13
2 NAVEGACIÓN ESPACIAL.....	15
2.1 NECESIDAD DE NUEVOS SISTEMAS DE POSICIONAMIENTO	15
2.2 HISTORIA DE LA NAVEGACIÓN ESPACIAL BASADA EN PÚLSARES	16
2.3 ESTRUCTURA DEL SISTEMA DE NAVEGACIÓN	18
3 LOS PÚLSARES.....	20
3.1 ¿QUÉ ES UN PÚLSAR?.....	20
3.1.1 Formación de los Púlsares.....	21
3.1.2 Su estructura	22
3.1.3 Campos magnéticos.....	23
3.1.4 Los periodos de rotación.....	24
3.1.5 La población galáctica.....	27
3.2 LOS RADIO PULSOS PROVENIENTES DE LOS PÚLSARES	29
3.2.1 Características temporales de los pulsos.....	31
3.2.2 El perfil del pulso	34
3.2.3 Características de los pulsos individuales	37
3.3 ASPECTOS TÉCNICOS	55
3.3.1 El medio interestelar.....	56
3.3.2 Densidad de Flujo	58
3.3.3 Potencia espectral media	60
3.3.4 Ruido del sistema.....	60
3.3.5 Tasa de SNR.....	62
3.3.6 Técnicas experimentales	63

4 MODELO DE SEÑAL	67
4.1 MODELO DE SEÑAL ESTOCÁSTICO	67
4.2 MODELO DE LA SEÑAL PÚLSAR EN BANDA ANCHA.....	70
4.2.1 <i>Modelo Experimental</i>	70
4.2.2 <i>Modelo Teórico Genérico</i>	72
4.3 ANÁLISIS SUBBANDA DE X(T).....	73
4.3.1 <i>Muestreo</i>	75
4.4 MODELO DE LA MATRIZ DE CORRELACIÓN: SEÑAL PÚLSAR	76
4.4.1 <i>Desarrollo analógico en serie de Fourier de la matriz correlación</i>	77
4.4.2 <i>Desarrollo discreto en serie de Fourier de la matriz correlación</i>	79
4.4.3 <i>Estructura detallada de la matriz correlación discreta</i>	80
4.4.4 <i>Conclusiones</i>	81
4.5 MODELO DE LA MATRIZ DE CORRELACIÓN DEL RUIDO	81
4.5.1 <i>Ruido del sistema</i>	81
4.5.2 <i>Radiación proveniente del Sol y de Júpiter</i>	82
5 ESTIMACIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD.....	83
5.1 EL PRINCIPIO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD.....	83
5.2 EL MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD.....	83
5.2.1 <i>Función de Verosimilitud</i>	84
5.2.2 <i>Estimadores de máxima verosimilitud</i>	86
6 APLICACIÓN DE MLE	91
6.1 INTRODUCCIÓN	91
6.2 ESTIMACIÓN DEL TIEMPO DE LLEGADA (TOA).....	92
6.2.1 <i>Establecimiento de los límites de funcionamiento</i>	94
6.2.2 <i>Caracterización estadística de la señal púlsar</i>	95
6.2.3 <i>Caso gaussiano cíclico</i>	96
6.2.4 <i>Caso cíclico no gaussiano</i>	99
6.2.5 <i>Evaluación de la realización: Regiones de funcionamiento</i>	106
6.2.6 <i>Estimación temporal de la fase</i>	112
6.2.7 <i>Análisis Multibanda y Dispersión interestelar</i>	116
7 ESTIMACIÓN DE LA FASE	119
7.1 INTRODUCCIÓN	119
7.2 ESTIMACIÓN.....	119
7.2.1 <i>Primera versión</i>	120

7.2.2	<i>Segunda versión: métodos semianalíticos</i>	126
7.3	SIMULACIONES OBTENIDAS	144
8	CONCLUSIONES	150
9	PERSPECTIVAS FUTURAS	155
10	ANEXO A. ESTIMACIÓN DEL PERIODO RECIBIDO (PATD)	158
10.1	INTRODUCCIÓN. CUANTIFICACIÓN DEL EFECTO DOPPLER.....	158
10.2	DEDUCCIÓN DE LA MÉTRICA	159
10.2.1	<i>Desigualdad de Schwartz</i>	161
10.2.2	<i>Aplicación de la desigualdad de Schwartz a la métrica</i>	162
10.3	ESTIMACIÓN SIMULTÁNEA DEL RETARDO Y DE LA FRECUENCIA RECIBIDA.....	162
10.4	FUNCIONAMIENTO DE LOS ALGORITMOS	165
10.5	ESTIMACIÓN DEL PATD.....	169
10.5.1	<i>REALIZACIÓN DEL PROGRAMA</i>	170
10.5.2	<i>PROBLEMÁTICA DE BAJA SNR</i>	171
10.6	SIMULACIONES OBTENIDAS	174
10.6.1	<i>Sesgo del estimador</i>	174
10.6.2	<i>Covarianza del error</i>	176
11	ANEXO B. CÓDIGO	178
11.1	CÓDIGO UTILIZADO EN LA ESTIMACIÓN DE LA FASE	178
11.1.1	<i>Gen_perfil</i>	178
11.1.2	<i>Gen_recibida</i>	178
11.1.3	<i>Sincronización_acumulada</i>	179
11.1.4	<i>Gen_senal_recibida</i>	180
11.1.5	<i>Verificacion_gausiana</i>	181
11.1.6	<i>Verificacion_estadisticas</i>	182
11.1.7	<i>Sincronizacion_generada</i>	183
11.1.8	<i>Verificacion_generada</i>	184
11.1.9	<i>Verificacion</i>	185
11.1.10	<i>Calculo_sesgo</i>	186
11.1.11	<i>Grafica_sesgo</i>	187
11.1.12	<i>Grafica_sesgo_multiple</i>	188
11.1.13	<i>Calculo_varianza</i>	189
11.1.14	<i>Grafica_varianza</i>	189
11.1.15	<i>Grafica_varianza_multiple</i>	190

11.2	CÓDIGO UTILIZADO EN LA ESTIMACIÓN DEL PATD	191
11.2.1	<i>Estimacion_PATD</i>	191
11.2.2	<i>Estimacion_nueva</i>	193
11.2.3	<i>Grafica</i>	195
12	REFERENCIAS	197

AGRADECIMIENTOS

Primero de todo, quisiera darles las gracias a mis padres por haberme insistido durante tanto tiempo a que no lo dejara de lado, a que a pesar de tener un trabajo fijo, lo importante hoy en día era obtener la titulación superior que tanto esfuerzo me costó conseguir, así como por su amor incondicional y su paciencia infinita. También quisiera agradecerles la oportunidad que me han brindado porque sé que para ellos también supuso un gran esfuerzo,

También quisiera agradecerse a mis dos grandes pilares, que tan bien me conocen, me comprenden y me miman, Susana y Silvia, porque siempre han estado a mi lado, en los buenos y malos momentos y que también quisiera que estuvieran conmigo en esta memoria, tan especial para mi.

Agradecérselo también, de manera especial, a mi tutor, Josep Sala, por tener tanta paciencia conmigo cada vez que volvía a aparecer con la fuerte promesa de querer acabar, esta vez sí, el proyecto. Por sus consejos, sus explicaciones y su imprescindible orientación.

También quisiera agradecerse al resto de mi familia, amigos y compañeros de trabajo, especialmente, a mi tía Lourdes, porque aunque fuera dos veces al año me recordaba siempre que tenía algo pendiente que finiquitar.

Y en último lugar y de manera muy especial, a mi abuelo Inocencio, que sé que desde allá arriba me acompaña y me da la fuerza necesaria para continuar, porque él nunca se rendiría.

A todos vosotros, mil gracias.

RESUM DEL PROJECTE

L'objectiu d'aquest projecte ha estat verificar els resultats teòrics presentats en l'estudi "Feasibility Study for a Spacecraft Navigation System relying on Pulsar Timing Information" [4] a través d'una validació independent portada a terme mitjançant simulacions realitzades en Matlab. En aquest estudi es presenta el processament de senyal necessari per a la detecció de la fase de les senyals emeses per uns estels anomenats púlsars, amb l'objectiu de ser utilitzats com a fonts celestes de radio per a la navegació espacial. El resultat final és la definició de l'estimador òptim de la fase i les seves característiques estadístiques, que son justament les que s'han volgut verificar a través de les simulacions.

La simulació de l'estimació es va realitzar en dos parts. En la primera la senyal rebuda del pulsar és generada afegint a més el soroll. En el segon pas és simulat l'estimació del retard. Degut al temps excessiu d'execució es va decidir utilitzar tècniques semianalítiques per agilitzar les simulacions. Un cop aquestes tècniques van ser validades per aquest cas, es va obtenir el biaix i la variança de l'estimador en funció de la SNR i per a simulacions realitzades per un numero diferent de períodes acumulats.

A partir d'aquests gràfics es va confirmar que el comportament de l'estimador era el que es mostrava en l'estudi teòric. S'apreciaven les tres zones de funcionament: saturació, subllindar i de CRLB. Es verifica, que tenint en compte les SNR habituals (baixes) els algoritmes d'estimació temporal mai operarien en la regió del terra (alta SNR). I a més es valida també que conforme el número de períodes augmenta, la SNR llindar disminueix i així mateix la SNR a la que l'estimador entra en la zona de saturació. I que per tant la regió operativa es desplaça fins baixes SNR.

Els resultats teòrics queden d'aquesta manera verificats a través d' una validació independent.

RESUMEN DEL PROYECTO

El objetivo de este proyecto ha sido verificar los resultados teóricos presentados en el estudio “Feasibility Study for a Spacecraft Navigation System relying on Pulsar Timing Information”[4] a través de una validación independiente llevada a cabo mediante simulaciones realizadas en Matlab. En este estudio se presenta el procesamiento de señal necesario para la detección de la fase de las señales emitidas por una estrellas llamadas pulsares, con el objetivo de ser utilizadas como fuentes celestes de radio para la navegación espacial. El resultado final es la definición del estimador óptimo de la fase y sus características estadísticas, que son justamente las que se han querido verificar a través de las simulaciones.

La simulación de la estimación se realizó en dos pasos, en el primero se generaba la señal recibida del pulsar añadiendo a ésta el ruido, en el segundo paso se simulaba la estimación del retardo. Debido al tiempo excesivo de ejecución se decidió utilizar técnicas semianalíticas para agilizar las simulaciones. Una vez comprobado que éstas técnicas fueran válidas en este contexto, se obtuvieron el sesgo y la varianza del estimador en función de la SNR y para simulaciones realizadas para diferente número de periodos acumulados. A partir de estos gráficos se confirmó que el comportamiento del estimador era el que se mostraba en el estudio teórico. Se aprecian las tres zonas de funcionamiento: saturación, subumbral y de CRLB. Se verifica, que teniendo en cuenta las SNR habituales (bajas) los algoritmos de estimación temporal nunca operarían en la región del suelo (alta SNR). Y además se valida también que conforme el número de periodos aumenta, la SNR umbral disminuye y así mismo la SNR a la que el estimador entra en la zona de saturación. Y que por tanto la región operativa se desplaza hacia bajas SNR. Los resultados teóricos quedan de esta forma verificados a través de una validación independiente.

ABSTRACT

This project's objective has been the verification of theoretical results showed on study "Feasibility Study for a Spacecraft Navigation System relying on Pulsar Timing Information"[4] through an independent validation conducted by simulations made in Matlab. In this study it is presented the necessary signal processing for phase detection of the signals emitted by a stars called pulsar, with the objective of being used as celestial radio source for space navigation. The final result is optimum phase estimator definition and its characteristics, that are precisely those that have wanted to verify through simulations.

Estimation's simulation was performed in two steps. In first one, pulsar received signal was generated adding noise. In second step the fase estimation was simulated. Due to excessive execution time, the use of semianalytics techniques was decided in order to speed up simulations. Once these techniques were validated in this context, the bias and variance of the estimator were obtained as a function of SNR and with simulations for different numbers of accumulated periods.

From these graphs it was confirmed that the behavior of the estimator was that it showed in the theoretical study. The three areas of operation were showed: saturation, subthreshold and CRLB. It is verified that taking into account the usual SNR (low), time estimation algorithms would never operate in the land region (high SNR). And it also validates that as the number of periods increases, the threshold SNR decreases and likewise the SNR at which the estimator enters in saturation zone. And therefore the operating region is shifted to lower SNR.

This way the theoretical results are verified through an independent validation.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Objetivo del proyecto

El objetivo de este proyecto es llevar a cabo un estudio de viabilidad sobre la utilización de los púlsares como fuentes celestes de radio para la navegación espacial.

Los púlsares son estrellas de neutrones que giran rápidamente generando radiaciones electromagnéticas que pueden ser detectadas en las bandas de radio, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos X y rayos Gamma. Estas radiaciones son características de cada púlsar convirtiendo a gran parte de ellos en fuentes únicas, estables y periódicas. La extrema estabilidad frecuencial de los púlsares en radio y rayos X y su ubicuidad¹ son otras cualidades por las que han sido considerados, ya en el pasado, para su utilización en sistemas de posicionamiento. Actualmente no se ha conseguido todavía ningún sistema factible debido a diferentes tipos de obstáculos y se continúa su estudio.

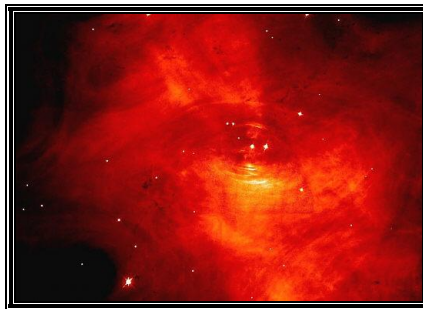


Ilustración 1.1: Foto del púlsar en la Nebulosa del Cangrejo [1]

¹ Facultad de estar presente en varios sitios a la vez. [2]

Aunque muchos y diferentes aspectos necesitan ser estudiados en el diseño de un sistema de autopoicionamiento a escala del Sistema Solar, el énfasis en este estudio se centrará en los temas de procesamiento de señal. Siendo éste el tema central, los puntos tratados son los siguientes:

- Historia de la navegación espacial basada en señales púlsar.
- Propiedades de los púlsares y sus emisiones.
- Aspectos físicos relacionados con la caracterización de las señales recibidas en radio.
- Procesamiento de la señal para la estimación del tiempo de llegada basada en el método de Máxima Verosimilitud.
- Desarrollo de los algoritmos de las estimaciones en lenguaje Matlab.
- Simulaciones obtenidas a partir de los algoritmos desarrollados.
- Conclusiones sobre la factibilidad.

Como complemento a este estudio se ha realizado otro más breve sobre la estimación de la deriva en frecuencia, que se adjunta como anexo.

Así pues, el principal objetivo es realizar un análisis de alto nivel del modelo de señal para determinar la relación entre precisión y complejidad alcanzable para señales de púlsares centrándonos en la banda de radio, comparando las simulaciones obtenidas a partir del desarrollo de los algoritmos en Matlab con las obtenidas teóricamente. [3, 4]

1.2 Estructura del proyecto

Los puntos tratados se han estructurado en los siguientes capítulos:

- Capítulo 1. En este primer capítulo se ha descrito cual es el objetivo del proyecto, que temas se van a tratar y como serán estructurados.
- Capítulo 2. En el segundo capítulo abordaremos el problema de la navegación espacial actual, cuáles han sido las propuestas basadas en pulsares, cuáles son los problemas que quedan por resolver y el modelo de estructura del sistema de navegación que se ha tomado.
- Capítulo 3. El tercer capítulo trata sobre los pulsares y las propiedades que los caracterizan así como el tipo de señales que emiten y los problemas técnicos encontrados para recibir estas señales.
- Capítulo 4. El modelo de señal es caracterizado en el cuarto capítulo, dedicado a modelos estocásticos para las señales pulsar y a su caracterización estadística y la del ruido.
- Capítulo 5. También se ha introducido un capítulo sobre la teoría de la estimación de máxima verosimilitud ya que es la teoría en la que se basara el algoritmo propuesto para la estimación temporal.
- Capítulo 6. En el capítulo sexto se continúa con la etapa de estimación temporal para radio pulsares. Así mismo se realiza una descripción detallada de los algoritmos seguido de la problemática de baja SNR.

- Capítulo 7. Se explica cual fue el proceso llevado a cabo para obtener las simulaciones y los resultados obtenidos.
- Capítulo 8. Se explica cual ha sido el resultado de la verificación y las conclusiones resultantes.
- Capítulo 9. En este capítulo se explica cuales son las perspectivas futuras a partir de los resultados obtenidos.
- Anexo A. En el primer anexo y a modo de complemento, se trata el tema de la estimación de la deriva de la frecuencia y los algoritmos utilizados.
- Anexo B. En el segundo anexo, se puede consultar el código MATLAB utilizado en el estudio tanto para la estimación de la fase como de la deriva de la frecuencia.

2 NAVEGACIÓN ESPACIAL

2.1 Necesidad de nuevos sistemas de posicionamiento

La mayoría de operaciones en vehículos espaciales se apoyan en soluciones de navegación terrestre para completar sus tareas. Como el coste de las operaciones continúa aumentando, la navegación espacial está evolucionando desde las soluciones basadas en las terrestres hacia el incremento de los métodos autónomos.

Para los vehículos que operan cerca de la Tierra, el actual Global Positioning System (GPS) puede proveer una solución completa de navegación incluyendo tiempo, posición y orientación. Aunque estos sistemas desarrollados por los humanos tienen un alcance limitado para las operaciones de los vehículos situados relativamente lejos de la Tierra. Así, parece atractivo un sistema autónomo basado en el espacio, el cual use fuentes a grandes distancias de la tierra que puedan proveer una solución completa para la navegación de misiones espaciales. Las fuentes celestes recientemente descubiertas pueden proveer soluciones para la navegación a través del sistema solar y más allá. Las estrellas de neutrones, tienen una tasa de rotación excepcionalmente alta, con inmensos campos magnéticos, y en referencia a los pulsares, provistos de una firma estable, predecible y única. Estas características pueden ser de gran utilidad para el desarrollo de sistemas de autopoicionamiento espacial. [3]



Ilustración 2.1: Sonda espacial Venus Express [5]

2.2 Historia de la navegación espacial basada en púlsares

En 1974, G.S.Downs presentó un método de navegación para naves espaciales orbitales basada en señales de radio provenientes de un púlsar, aunque tanto la firma óptica de los púlsares como la de radio tienen limitaciones para la navegación espacial. A las frecuencias de radio que los púlsares emiten ($\sim 100\text{MHz}$ hasta pocos GHz) y con sus débiles emisiones, los sistemas basados en radio requerirían grandes antenas (del orden de 25m de diámetro o incluso más largas) para detectar las fuentes, lo cual sería impracticable para la mayoría de las naves espaciales. Además, muchos objetos celestes y las emisiones galácticas difusas son fuentes de radio de banda ancha que pueden oscurecer los débiles pulsos de los púlsares. Por otra parte, la baja intensidad de la señal proveniente de los púlsares de radio requeriría tiempos de integración largos para una aceptable relación señal a ruido.

La pequeña población de púlsares con pulsaciones ópticas detectados limita severamente un sistema de navegación basado en púlsares ópticos. Como los púlsares ópticos son además una fuente débil, se requieren largas aperturas en los telescopios para recoger suficientes fotones.

Cualquier fuente visible, nítida y asequible requeriría un apuntamiento preciso y un proceso considerable para detectar estos púlsares.

Durante la década de los setenta, las observaciones astronómicas en la banda de los rayos X de 1-20keV ($2.5 \times 10^{17} - 4.8 \times 10^{18}\text{Hz}$) dio como fruto púlsares con firmas en esta banda. Chester y Butman propusieron usar las emisiones de los púlsares en la banda de los rayos X como opción a trabajar para la navegación. Sensores potencialmente del orden de 0.1m^2 podrían ser usados para la detección de los rayos X, de tamaño mucho más razonable para las naves espaciales que los grandes telescopios ópticos o las grandes antenas de radio.

Durante el principio de la década de los noventa, K.S.Wood propuso el estudio de un sistema completo de posicionamiento de navegación basada en rayos X que cubriera la orientación, la posición y el tiempo, a través de una misión que lo demostrara. Este estudio incluye la utilización de otras fuentes de rayos X además de los púlsares. J.E. Hanson continuó su esfuerzo, su tesis en 1996 incluyó una descripción detallada de la determinación de la orientación de la nave espacial y un método para incorporar el tiempo a partir de fuentes de rayos X. Desde 1999 al 2000, el experimento llevado a cabo por el Naval Research Laboratory's (NRL) Unconventional Stellar Aspect (USA) a bordo del Advanced Research and Global Observation Satellite (ARGOS) dotó de una plataforma para la experimentación en el campo de la navegación espacial basada en púlsares.

Todavía hoy se presenta como interesante un sistema de autopoicionamiento basado en las señales recibidas de los púlsares pero hay limitaciones que todavía no han sido superadas. [3]



Ilustración 2.2: Satélite ARGOS [6]

2.3 Estructura del Sistema de Navegación

Para llevar a cabo este estudio se ha considerado una estructura especial para el sistema de navegación, donde el procesamiento se lleva a cabo en una jerarquía de niveles:

- Etapa instrumental: antenas de radio.
- Etapa de estimación temporal: estimación de los parámetros temporales del púlsar.
- Etapa de estimación de posicionamiento: determinación de la posición.
- Etapa de navegación: nivel más alto de la información navegacional.

De esta manera las expresiones de forma cerrada han sido obtenidas para los parámetros de interés, centrándose en la etapa de estimación temporal.

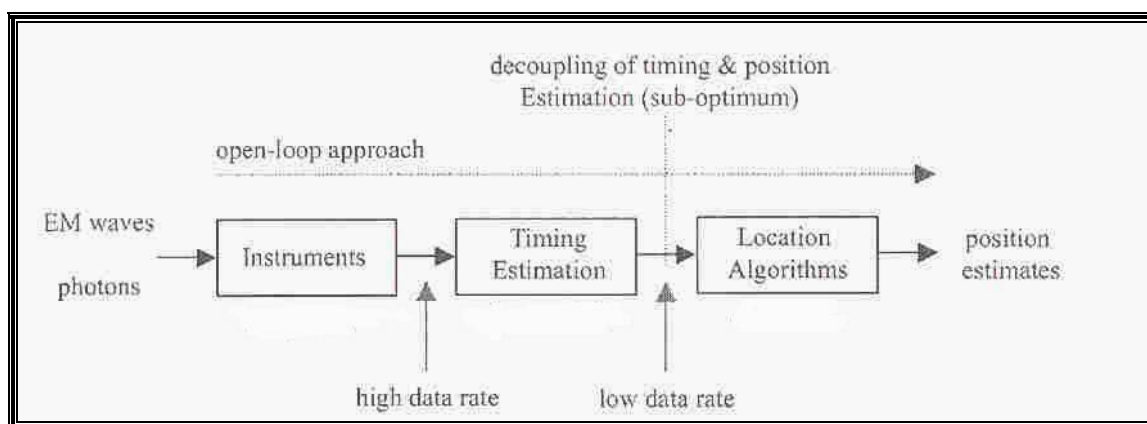


Ilustración 2.3: Estructura del sistema de navegación. [4]

En la Ilustración 2.3 la primera etapa (instrumentos) convierte las ondas EM/fotones en la señal de entrada bruta a las etapas de procesamiento digital de la señal. Se han separado las estimaciones de los parámetros temporales (segunda etapa) y localización (tercera etapa) para facilitar la implementación y obtención de las expresiones cerradas de la realización de medidas. La estimación temporal utiliza información proveniente de bases de datos sobre púlsares para comparar los tiempos de llegada medidos con los esperados. La etapa de localización usa esta información diferencial para obtener la estimación de la posición. Todo el proceso es llevado por una arquitectura de lazo abierto, excepto el proceso de localización donde las estimaciones temporales de los bloques de datos previos son usadas en la obtención de la actual estimación de la posición. [4]

3 LOS PÚLSARES

3.1 ¿Qué es un púlsar?

Los púlsares son una de las tres formas, junto con las estrellas binarias de rayos X y con las posibles explosiones de rayos gamma, que tenemos de conocer la existencia de las estrellas de neutrones, que una vez fueron únicamente un concepto teórico remoto. De estas tres formas de estrellas de neutrones, con diferencia la más numerosa y la que más información aporta son los púlsares. Los púlsares tienen un ancho de banda que va desde las frecuencias de radio bajas hasta los rayos gamma de alta energía. Sus emisiones de radio representan sólo una pequeña parte del total de la energía generada por su rotación, sin embargo, son un indicador remarcable de muchas propiedades físicas, ya que es posible incluso explorar condiciones profundas en el interior de las estrellas. Se han descubierto alrededor de 1300 púlsares, un número suficiente para estudios significativos de su población, su vida histórica, y su distribución a través de la galaxia. Para todo pero sólo para unas pocas de estas estrellas, la radio provee los únicos medios de observación. En este capítulo se explica cuáles son sus principales propiedades, que tipo de emisiones generan y cuál es su importancia para la navegación espacial, sirviendo como introducción para los capítulos siguientes. [4, 7, 8]

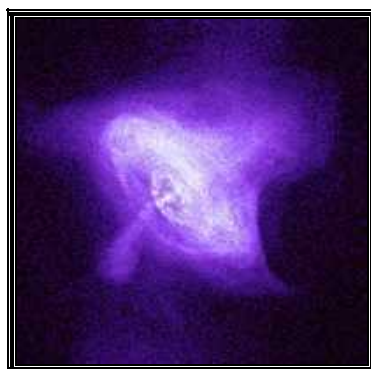


Ilustración 3.1: Anillo del púlsar de la nebulosa del Cangrejo [9]

3.1.1 Formación de los Púlsares

Los púlsares son estrellas de neutrones con cuerpos altamente condensados formados en el colapso gravitacional de los corazones de estrellas masivas, después del agotamiento del combustible para la combustión atómica. El cuerpo colapsado es un objeto altamente compacto, una estrella de neutrones, precedida por Baade & Zwicky (1934) y observada por primera vez en Cambridge en 1967. Durante el colapso, la estrella de neutrones acaba rotando a unas cien vueltas por segundo, el enorme campo gravitacional por medio de las fuerzas centrífugas evita que la estrella salga volando. [10]

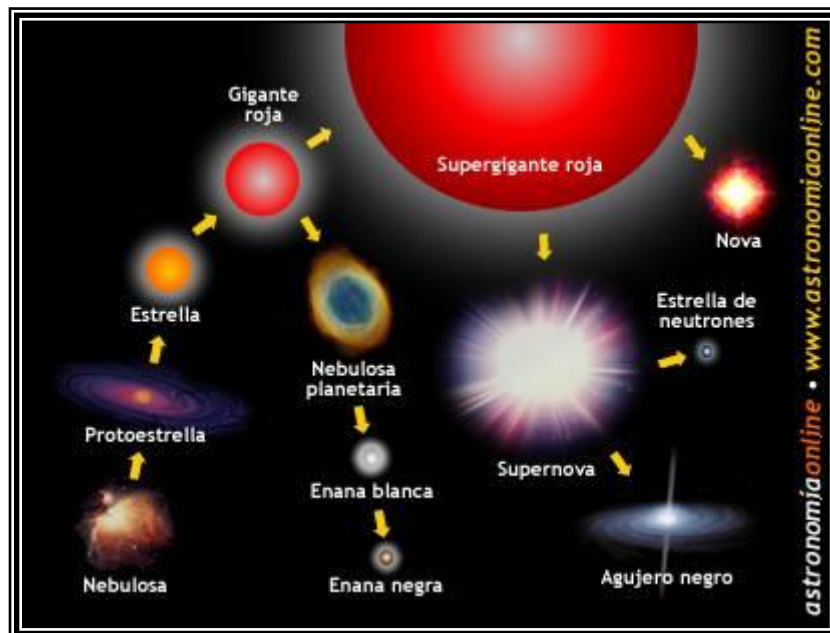


Ilustración 3.2: Nacimiento, evolución y muerte de una estrella. [11]

3.1.2 Su estructura

Las estrellas de neutrones, consistentes principalmente de neutrones como su propio nombre indica, tienen masas típicamente de alrededor de 1.4 veces la masa del Sol, pero confinadas en estrellas de tan solo 10-15 Km de radio. Con densidades medias de 10^{12} g/cm³, sus densidades centrales son quizás 1000 veces mayores. Para hacernos una idea, su densidad es tan grande que en ellos la materia de la medida de una bola de bolígrafo tiene una masa de cerca de 100.000 toneladas.

Como podemos observar en la Ilustración 3.3, la estructura de un modelo típico de una estrella de neutrones se compone principalmente de una capa cristalina sólida, de sobre 1 Km de grosor, y de líquido de neutrones en su interior. La parte más externa de la corteza es una rígida rejilla cristalina formada principalmente de núcleos de hierro. Las estrellas de neutrones con masa baja pueden no tener un corazón sólido y sus capas más exteriores pueden ser más extensas. Entre la corteza y el centro, la densidad varía en un rango de sobre nueve unidades de magnitud, desde 10^6 hasta 10^{15} gcm⁻³. [1,7, 8, 10]

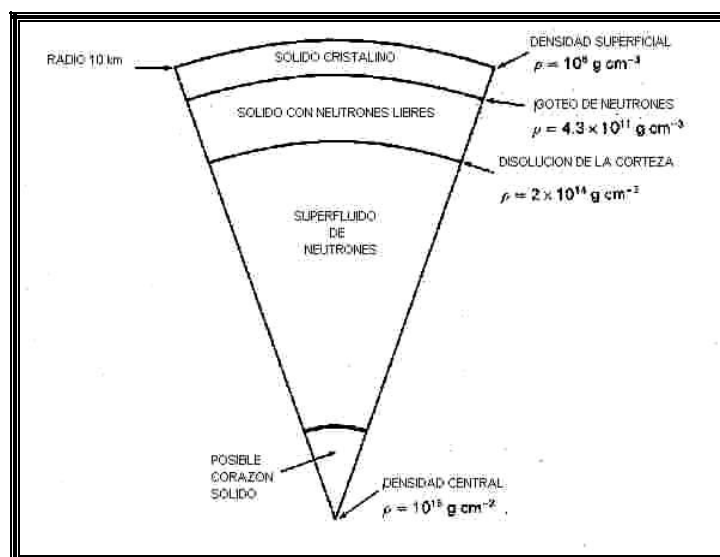


Ilustración 3.3: Sección transversal de una estrella típica de neutrones. [7]

3.1.3 Campos magnéticos

No se esperaría ser capaz de detectar tan pequeños e inertes cuerpos, excepto por el hecho de que están dotados principalmente con intensos campos magnéticos bipolares, los cuales son probablemente formados en el estrujamiento del campo magnético de la estrella progenitora durante el colapso y alimentada por las propiedades superconductoras de los pocos electrones y protones en el interior de la estrella. Estos campos son tan fuertes que dominan completamente todos los efectos físicos fuera de la estrella, incluso 10^{15} veces más que la gravedad.

La rotación de la estrella y la inducción electromagnética tienen como resultado grandes campos eléctricos a través de las líneas del campo magnético sobre los polos magnéticos. Estos campos aceleran partículas hasta altas velocidades relativistas, causando que estas emitan rayos de radiación electromagnética, aproximadamente fuera de los polos magnéticos (Ilustración 3.4). Los haces de radio se originan unas decenas de radios estelares por encima de la superficie. Las radiaciones ópticas y otras radiaciones de alta energía, sólo observables en púlsares jóvenes, se originan en otra región.

Debido a que el dipolo está desalineado con el eje de rotación, esta onda electromagnética es radiada a la frecuencia de rotación. A la vez que la estrella gira, estos rayos de radiación cruzan las líneas de mira de la Tierra y recibimos un pulso de energía. [7, 8,10]

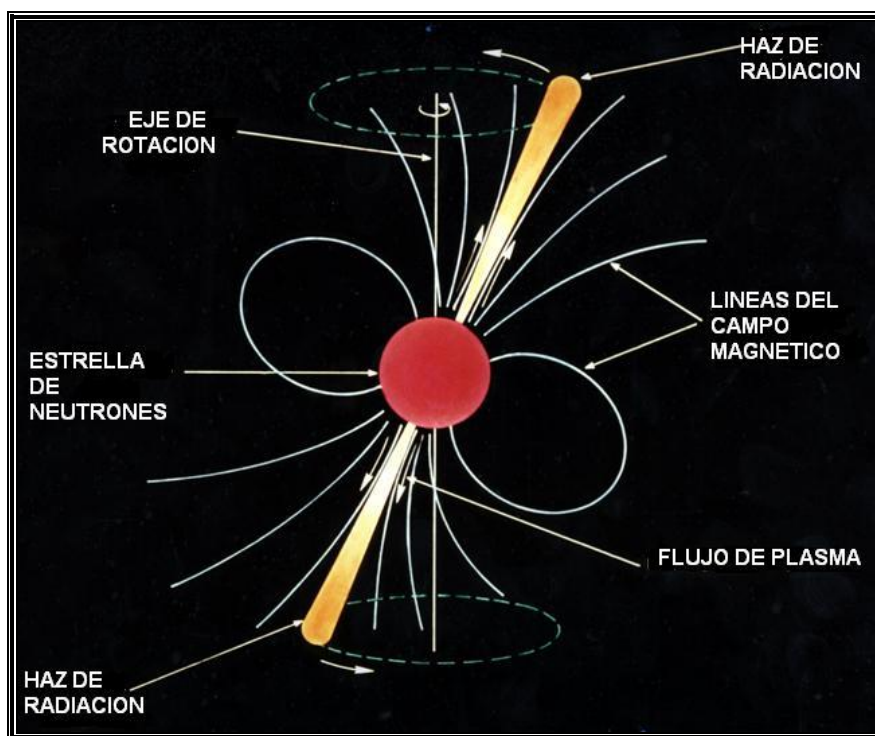


Ilustración 3.4: Modelo físico básico de un púlsar [8]

3.1.4 Los periodos de rotación

Las señales de radio pulsadas, las cuales dan a los púlsares su nombre (proviene de la expresión inglesa 'Pulsating Star'), son como los rayos de un faro en una estrella rotativa. Como se ha visto, los pulsos permiten seguir la rotación del púlsar de manera precisa, ya que la onda electromagnética es radiada a la frecuencia de rotación.

La mayoría de los pulsos tienen periodos comprendidos entre 0.1 y 2 segundos (el periodo más largo conocido es de 5.1 segundos), como se puede observar en la Ilustración 3.5. Este diagrama físico indica la naturaleza y la evolución de las estrellas de neutrones. Cada punto representa un púlsar, las estrellas representan púlsares asociados a restos de supernovas mientras que los círculos y elipses indican púlsares en sistemas binarios.

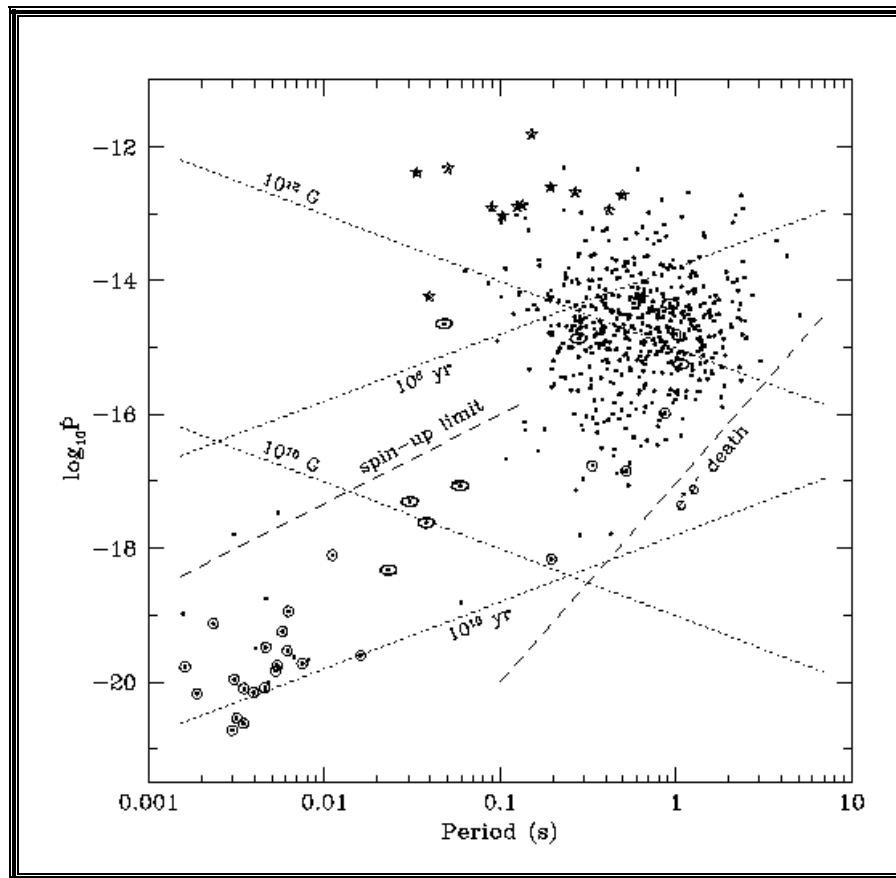


Ilustración 3.5: Diagrama de los radio púlsares. [12]

Todos los periodos van aumentando conforme los púlsares lentamente pierden su energía cinética de rotación (proceso conocido como spin-down), para la mayoría de púlsares la rotación decrece en una escala de tiempo de 10^6 a 10^8 años, como se puede observar en la Ilustración 3.5. La distribución de los periodos y su tasa de decrecimiento sugieren que la mayoría de púlsares comienzan su vida con periodos por debajo de 100 milisegundos, siguiendo un camino evolutivo similar, y cesan de radiar después de unos cuantos millones de años. Esta interpretación conduce a una tasa de nacimiento del orden de 1 cada 50 años.

En la Ilustración 3.6 podemos observar la población separada de los púlsares llamados “milisegundarios”, con periodos la mayoría por debajo de 10 milisegundos. Estos tienen una tasa de decrecimiento mucho más pequeña debido a que sus campos magnéticos son mucho más pequeños. Estos púlsares son considerados como estrellas de neutrones que han pasado ya la edad normal de actividad, su campo magnético ha decaído pero se han rejuvenecido por un proceso de “spin-up” involucrando a un copartícipe. Este proceso de auto “spin-up” puede ser observado directamente en los sistemas binarios de rayos X, aquí la expulsión de materia del compañero suministra a ambos de energía térmica para la emisión de rayos X y de momento angular para incrementar la velocidad de rotación.

En contraste con la mayoría de estrellas, en general los púlsares no pertenecen a sistemas binarios. De los pocos que forman parte de sistemas binarios, la mayoría son púlsares “milisegundarios”, y su rejuvenecimiento es probablemente debido al sistema binario en el cual son observados. [4, 7, 8,12]

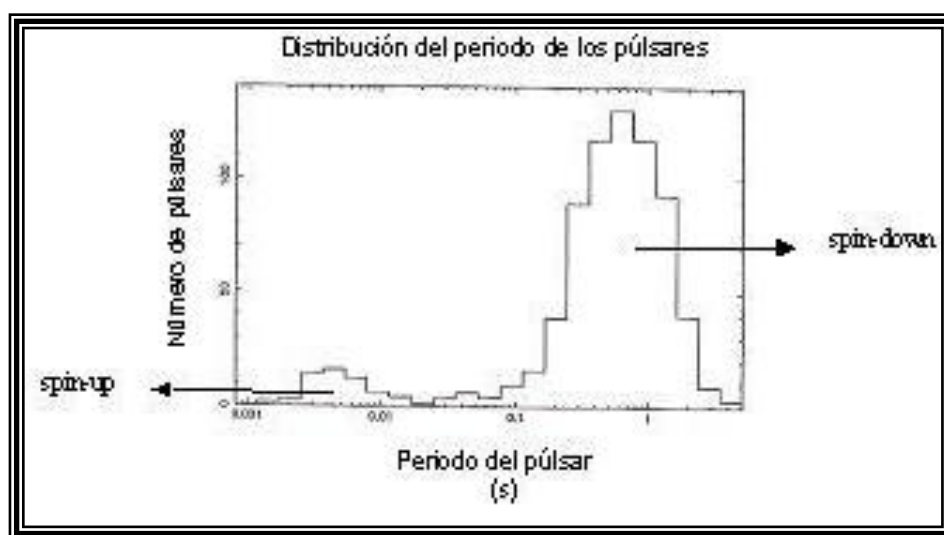


Ilustración 3.6: La distribución de los periodos de los púlsares [7]

3.1.5 La población galáctica

Estudios sobre púlsares, dirigidos a descubrir cómo están distribuidos a lo largo de la galaxia, están sujetos a la limitación obvia de la sensibilidad: los púlsares débiles sólo pueden ser vistos a cortas distancias, y puede que por tanto sean pobremente muestreados, mientras que pueden haber dificultades para ver a los más luminosos más allá del centro de la galaxia.

En suma, hay limitaciones serias debido a los efectos del medio interestelar en la propagación de las ondas de radio, como se verá más adelante; esto se hace particularmente cada vez más importante en el plano galáctico y hacia el centro de la galaxia.

A pesar de estos problemas y de la todavía incompleta cobertura del cielo, un cúmulo estadístico de sonidos emerge. Se calcula que hay un total de entre 10^5 y 10^6 púlsares activos en la Galaxia. La mayoría de ellos están concentrados en el plano de la galaxia dentro de una capa de sobre 1 kiloparsec² de grueso y dentro de un radio de distancia de sobre 10 kiloparsecs del centro, como se puede observar en la Ilustración 3.7.

Las medidas de su movimiento muestran que tienen altas velocidades, presumiblemente originarias de su violento nacimiento, y se mueven a través del plano a una tasa del orden de 200Kms^{-1} , así que la distribución es consistente con un origen dentro de 100 pársecs del plano galáctico.

² Parsec: contracción de paralaje y segundo. Unidad de distancia usada en astronomía, que corresponde a la distancia a la Tierra de una estrella cuyo paralaje anual es igual a un segundo de grado. El parsec equivale a 3.26 años luz, es decir, $3.08 \cdot 10^{13}$ kilómetros. [13]

Los púlsares “milisegundarios” representan una población pequeña de púlsares viejos. Su tasa de renacimiento en el proceso de “spin-up” es mucho más bajo que la tasa de nacimiento de los púlsares normales, y son únicamente observables como una población considerable debido a su larga vida.

Se encuentran a través de la Galaxia, probablemente menos concentrados a través del plano que los púlsares jóvenes, como se puede observar en la Ilustración 3.7, muchos son además encontrados por ser localizados en clusters globulares, donde el proceso de “spin-up” es visto como el trabajo de concentración de sistemas binarios de rayos X.

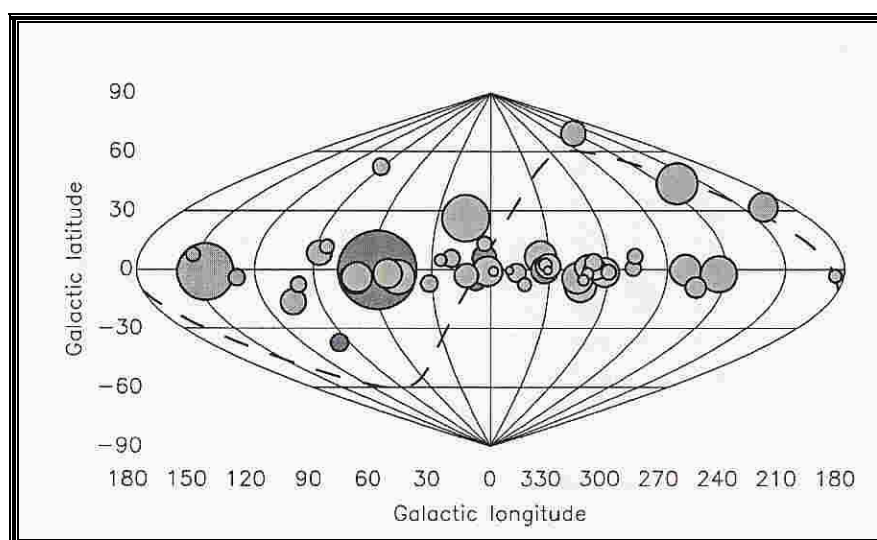


Ilustración 3.7: Posición de los principales púlsares en coordenadas galácticas.
[4]³

³ Sistema de coordenadas donde el plano fundamental es el plano de simetría galáctico (latitud $b=0$) y el origen de la longitud ($l=0$) es hacia el centro de la galaxia. [14, 15]

En la Ilustración 3.7 el tamaño de los círculos es un indicador de la fiabilidad de la posición del púlsar. Los círculos oscuros indican púlsares con periodos por debajo de 100 milisegundos y los claros corresponden a púlsares con periodos más grandes de 100 milisegundos. La línea punteada muestra el plano eclíptico⁴. Como se puede observar hay numerosos púlsares repartidos a lo largo de la Galaxia, cumpliendo por tanto con la propiedad de la ubicuidad, tan útil para los sistemas de autoposicionamiento en la navegación espacial. [4, 7]

3.2 Los radio pulsos provenientes de los Púlsares

Para la mayoría de púlsares, los pulsos de radio ocurren durante una fracción del periodo, correspondiente entre 5° y 20° de la rotación angular, que corresponde con un ciclo de trabajo típicamente del 5%; para alguno púlsares puede llegar a ser mucho más pequeño del 1%. Este pulso, formado por un haz de radiación que cruza la línea de mira del observador, recorre los 360° como si de un faro se tratase.

Los radio pulsos individuales provenientes de un púlsar en particular son muy variables, así como la lámpara de un faro parpadea, la dirección del haz varía erráticamente a través de un pequeño rango. La superposición de algunos centenares de pulsos registrados, sin embargo, da el perfil integrado del pulso, el cual es normalmente estable y característico para cada púlsar.

⁴ Es el plano de la órbita de los planetas del Sistema Solar alrededor del Sol. [16]

La intensidad de las emisiones de radio emitidas es extremadamente alta. Los pulsos de radio son además extremadamente variables en intensidad sobre unas cuantas escalas de tiempo. Muchos púlsares tienen subpulsos contenidos en estrechos picos; algunos tienen secuencias casi periódicas, referidas como ‘microestructuras periódicas’. Los subpulsos pueden aparecer independientemente de cada pulso, o puede que en secuencias; en estas secuencias pueden aparecer progresivamente antes o después dependiendo del perfil integrado del púlsar. Esta ‘deriva’ del pulso es característica de cada púlsar; pudiendo llegar a ser bastante diferentes.

Además puede ser que un púlsar tenga más de un perfil integrado de pulso asociado. El cambio de un ‘modo’ a otro se produce sin previo aviso. Las características de polarización generales, sin embargo, no cambian. También se pueden producir nullos, ocasionados cuando la excitación cesa completamente por un número de periodos de rotación.

Estudios con púlsares cercanos muestran que incluso con estas extremas variaciones en intensidad, forma del pulso y polarización, el perfil integrado se estabiliza de centenares a millares de periodos, llegando a ser reproducible durante años de manera estable, además de ser característico para cada púlsar.

A continuación se explican con más detalle estas características representativas de los pulsos, su estructura, su interpretación y como se reflejan en el perfil integrado del púlsar. Además en el siguiente punto se mostrarán cuales son los problemas técnicos que encontramos para poder determinar estas características y como son resueltos en la actualidad. [7, 8,17]

3.2.1 Características temporales de los pulsos

3.2.1.1 Slow-down

Como ya se ha visto los púlsares sufren un proceso de retraso llamado 'slowdown' debido a la pérdida de energía cinética en forma de ondas electromagnéticas bajas o partículas de alta energía. Este proceso normal es estable y predecible. Sin embargo algunos púlsares muestran comportamientos erráticos de dos tipos: 'glitches' y 'timing noise', que predominantemente ocurren en púlsares jóvenes. [10]

3.2.1.2 Glitches

Los 'glitches' son vistos como aumentos repentinos en la tasa de rotación, P , usualmente seguida por una mejora exponencial o relajación de vuelta a la frecuencia anterior al 'glitch'. Por ejemplo, en la Ilustración 3.8 se muestra el 'slowdown' del púlsar Vela durante un intervalo de 14 años. Durante este tiempo, 6 'glitches' pueden ser a penas observados en el diagrama superior junto con el 'slowdown' normal, eliminando el descenso se observan más claramente en el diagrama inferior.

Las relajaciones pueden ser observadas más claramente en la Ilustración 3.9. Los 'glitches' son raros, solo unos 20 de 700 púlsares lo sufren un total de 45 veces.

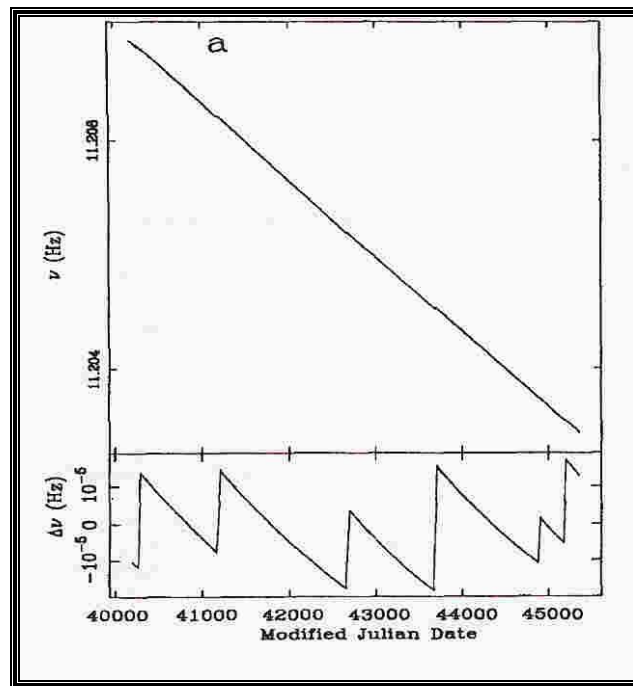


Ilustración 3.8: Slowdown del púlsar Vela durante 14 años. [10]

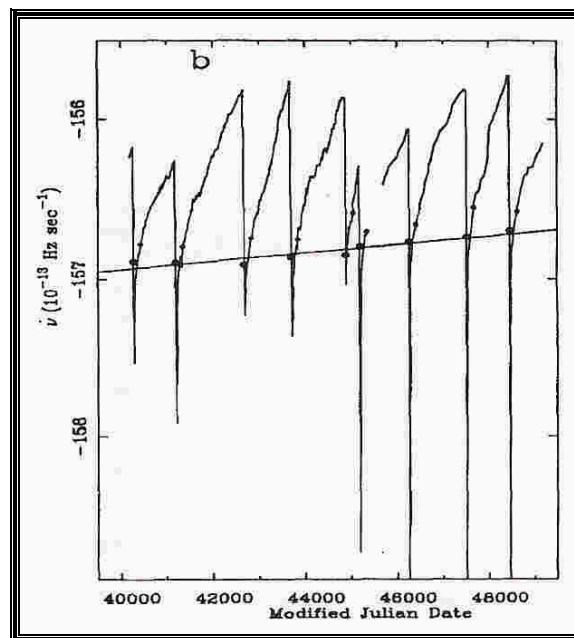


Ilustración 3.9: Slowdown del púlsar Vela durante 24 años. [10]

La primera causa propuesta de estos ‘glitches’ fue un terremoto, el cual puede provocar un cambio en la elasticidad de la corteza de la estrella de neutrones. Mientras esta teoría proveía una explicación satisfactoria para los pequeños e infrecuentes ‘glitches’, pronto se comprendió que su magnitud y frecuencia eran demasiado fuertes para ser sostenidos por este mecanismo. Más probablemente parece que, en este caso, los ‘glitches’ sean el resultado de la incontenencia catastrófica del superfluido de neutrones en el núcleo de la corteza sólida. [10]

3.2.1.3 Timing Noise

El ‘timing noise’ es caracterizado por una divagación de la fase continua e impredecible de los pulsos relativos a un modelo simple de ‘slowdown’. La explicación más natural para el ‘timing noise’ es que es debido a un curso irregular del momento angular debido al componente fluido en el interior de la estrella. La Ilustración 3.10 muestra ejemplos de ‘timing noise’ en unos cuantos púlsares jóvenes. [10]

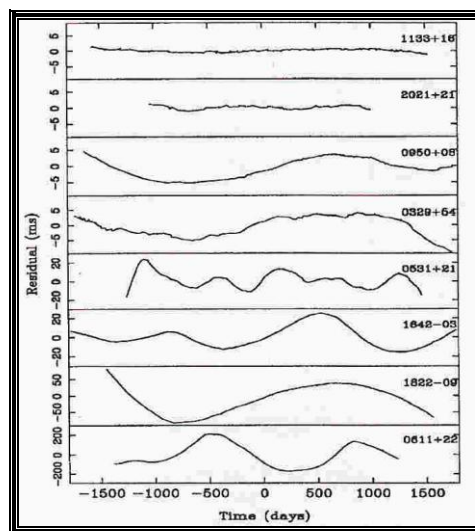


Ilustración 3.10: Ejemplos de ‘timing noise’ de ocho púlsares en un periodo de 10 años. [10]

3.2.1.4 Estabilidad de la frecuencia de rotación

Mientras los púlsares jóvenes muestran muchos ‘glitches’ y ‘timing noise’ en su actividad, se ha observado que los púlsares viejos, es decir los púlsares milisegundarios, los cuales únicamente sufren ‘slow down’ y muy gradualmente, son extraordinariamente estables. Mientras los objetos con mayor ‘timing noise’ tienen estabilidades de $\Delta f/f \cong 10^{-10}$, en escalas de tiempo de unos cuantos años, los púlsares milisegundarios tienen $\Delta f/f \leq 10^{-14}$. Esta estabilidad es comparable con la de los mejores relojes atómicos. Esta gran estabilidad es también una propiedad de gran utilidad para los sistemas de autopoicionamiento. [10, 17]

3.2.2 El perfil del pulso

El perfil del pulso es una representación de la señal integrada de múltiples pulsos detectados del mismo púlsar, donde normalmente se muestran uno o dos periodos completos. Los perfiles del pulso varían en amplitud, duración y número de picos mientras que la estabilidad depende de la naturaleza del púlsar. Esta unicidad nos permite identificar a cada púlsar individualmente.

Típicamente, la plantilla estándar del perfil es creada para observar una fuente específica a lo largo de algunos múltiplos del periodo del púlsar o realizando la media sincronizadamente con el periodo del pulso. En este proceso se obtiene un perfil del pulso con una tasa relación señal a ruido muy alta, donde las características del pulso pueden ser determinadas a partir del perfil, incluyendo la longitud del periodo, la amplitud y la variabilidad.

La Ilustración 3.11 muestra la plantilla estándar del púlsar Crab (PSR B0531+21)⁵ en la banda de los rayos X. La intensidad del perfil es una proporción de la tasa relativa y la tasa media. Esta imagen muestra dos ciclos del pulso, uno es el principal y el otro el secundario con una amplitud menor. La Ilustración 3.12 muestra dos ciclos del perfil de pulso del PSR B1509-58. [3]

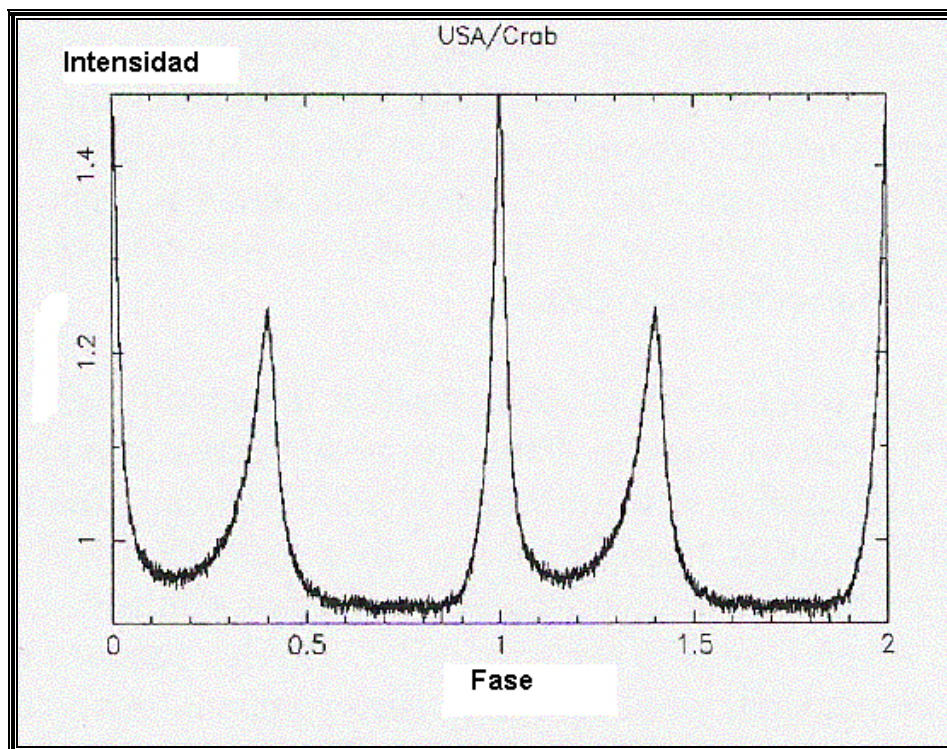


Ilustración 3.11: Perfil del pulso del púlsar Crab. [3]

⁵ Esta es la nomenclatura astronómica de los púlsares. PSR significa Pulsating Source of Radio, es decir, fuente de radio pulsada. Los números se refieren a la posición del púlsar y la letra B al sistema de coordenadas utilizado.[7]

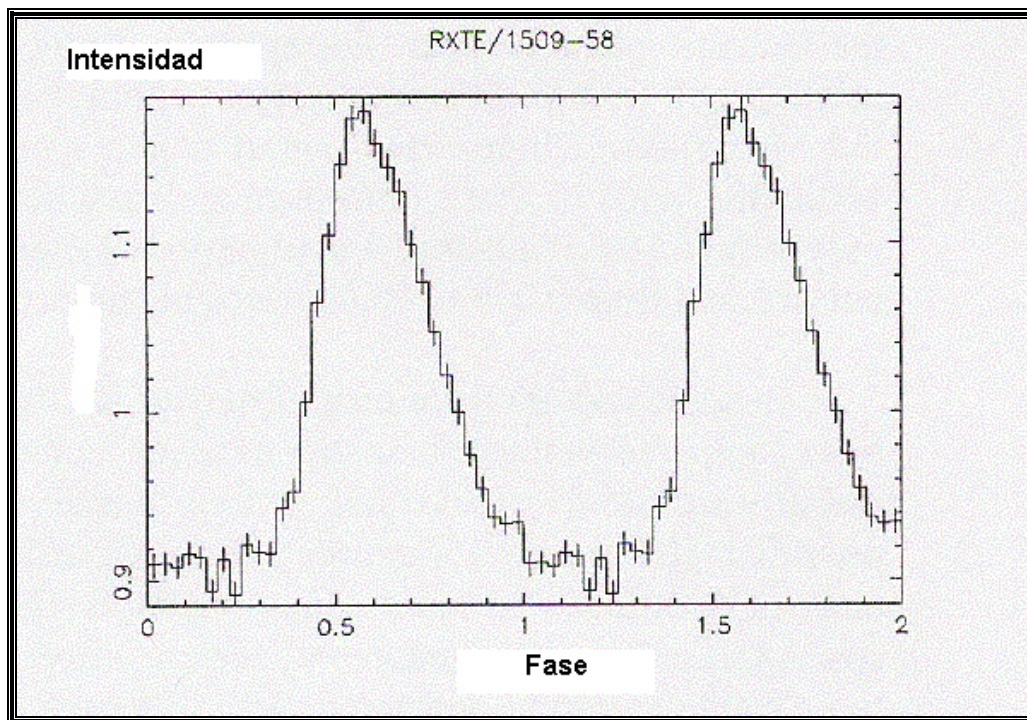


Ilustración 3.12: Perfil del pulso del púlsar PSR B1509-58. [3]

3.2.2.1 Características del perfil

Algunos perfiles integrados del pulso se extienden hasta una gran parte o incluso la totalidad del periodo de rotación del púlsar. La interpretación de este aparente haz de faro tan ancho puede ser la alineación muy cercana entre los ejes magnéticos y los de rotación. Otros perfiles integrados muestran dos componentes distintos, probablemente correspondientes a dos haces radiados desde los lados opuestos del dipolo magnético, orientado casi perpendicularmente al eje de rotación.

Los pulsos radiados individuales son a menudo altamente polarizados. Cuando el perfil integrado del pulso es formado por algunos pulsos añadidos, y los componentes polarizados son además añadidos convenientemente, se consigue una gran media de polarización. Esto suele mostrar un comportamiento simple remarcable: el ángulo de posición de la componente lineal se balancea monótonamente a través del pulso integrado con un ángulo superior a 180° . La polarización lineal es la dominante. En algunos púlsares se puede también observar una componente polarizada circularmente, normalmente cercana al centro del pulso.

Este simple patrón de polarización indica que el origen de los haces de radio es sobre un polo magnético; el balanceo del ángulo de posición está relacionado con la región de emisión cuya radiación es polarizada a través de las líneas de campo. Esta interpretación es soportada por la observación de que el patrón de polarización en un púlsar dado es muy similar sobre un ancho de banda de radio frecuencias; sin embargo es difícil de interpretar la amplitud con detalle, y es evidente que el haz de radio no tiene una configuración geométrica simple. [7] [8]

3.2.3 Características de los pulsos individuales

Los organizados y fácilmente reproducibles perfiles de pulso obtenidos por la integración de centenares de pulsos individuales esconden la diversidad del comportamiento de los pulsos individuales. El perfil integrado está constituido por una gran variedad de pulsos individuales, cada uno de los cuales tiene más de una componente: es la distribución estadística de estas componentes sobre un rango de longitudes, combinado con sus característicos anchos de banda y la distribución de probabilidad de sus intensidades lo que determina la forma repetitiva del perfil integrado. [7]

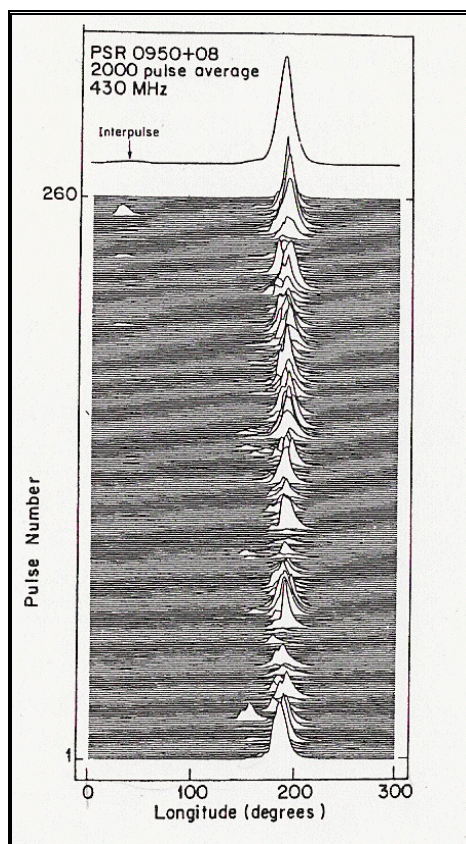


Ilustración 3.13: Una secuencia de pulsos del PSR0950+08 con el perfil integrado obtenido acumulando las secuencias de los pulsos individuales. (Hankins & Cordes 1981). [7]

Los componentes de un pulso individual son a menudo identificados como 'subpulsos' característicos, con un ancho de longitud de 1° a 3° (comparado con el ancho típico de 10° del perfil integrado). Estos subpulsos pueden ocurrir aparentemente en longitudes aleatorias dentro de la ventana definida por el perfil integrado, o muestran preferencia por ciertas longitudes las cuales muestran picos en el perfil integrado, o van a la deriva a lo largo de la ventana, apareciendo a longitudes las cuales cambian lentamente de pulso en pulso.

Los subpulsos son considerados como componentes básicos del perfil integrado; un subpulso individual representa pues la radiación desde una localización aislada dentro de la distribución de las localizaciones cubiertas por el perfil integrado.

Hay además una estructura en una escala de tiempo mucho más corta, conocida como 'microestructura'. Esta parece ser una modulación de la radiación de los subpulsos más que una componente distinta de la radiación. Grupos de micropulsos, espaciados aproximadamente periódicos, pueden ocurrir dentro de un único pulso.

Todos los componentes, sean subpulsos o micropulsos, usualmente muestran un alto grado de polarización. Las características de polarización de los subpulsos están organizadas de una forma simple, pero los cambios a través de un subpulso y las variaciones desde un subpulso al siguiente son normalmente suficientes para diluir la polarización en el perfil integrado. [7]

3.2.3.1 Intensidad del pulso individual. Nulling.

Primero se ha de remarcar que la intensidad media estimada de un púlsar oculta una distribución interesante de la potencia total del pulso entre los pulsos individuales. Algunos púlsares, como el PSR 1642-03 muestran una distribución de potencia total del pulso que se parece a una distribución normal sobre un valor medio. Otros, como el PSR 0950+08, muestran una distribución asimétrica con una alta probabilidad para valores bajos y un largo ramal hacia los valores altos de la potencia del pulso. El PSR 0834+06 muestra una distribución bimodal: hay una probabilidad finita de potencia cero, y una distribución separada de valores alrededor de un valor medio. Los ceros ocurren en grupos de pulsos; ellos representan un cambio a un nivel por debajo del 1% de la potencia media del pulso. Este fenómeno se conoce como 'nulling'.

La distribución de los ceros, y el intervalo entre ellos, varía aleatoriamente. Para algunos púlsares, los nulos, con duración de dos o tres pulsos, pueden ocurrir en intervalos de centenares de pulsos, mientras que para otros el estado de 'nulling' puede durar minutos y ocupar la mitad del tiempo total. El cambio entre los dos estados es muy rápido. Los nulos breves pueden, por supuesto, ser perdidos en las observaciones de los púlsares débiles los cuales sólo pueden ser detectados después de la integración de muchos periodos.

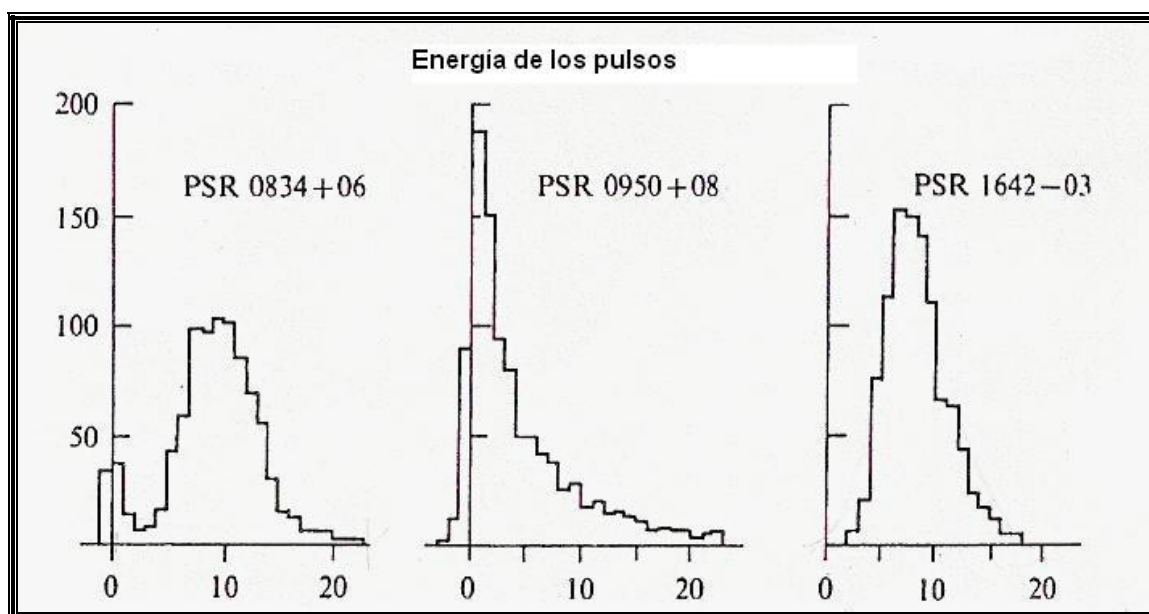


Ilustración 3.14: La distribución de la potencia del pulso de tres púlsares a partir de sus respectivos pulsos individuales registrados a 408MHz. [7]

El fenómeno de 'nulling' parece ser una característica de los púlsares viejos. La mayoría de los púlsares que presentan 'nulling' son encontrados en el diagrama de la Ilustración 3.15 cercanos a la 'línea de la muerte'; los púlsares se van acercando a esta línea desde la parte izquierda del diagrama a medida que se aproximan al final de sus vidas.

Es particularmente interesante notar que los púlsares cercanos a esta línea muestran nulling y deriva (los que muestran una o ambas de estas irregularidades son marcados con una cruz). Estas características son indicios de la edad avanzada del púlsar y de su inminente cese. El grado de complejidad del perfil integrado también puede ser un indicador de la edad adulta del púlsar, aunque hay algunos efectos observables seleccionados que juegan en la determinación de la complejidad.

Una interpretación natural sería que la emisión del púlsar cesa repentinamente produciéndose los nulos; posiblemente el cese tiene lugar a través de estos estados de 'nulling' a medida que estos van teniendo una duración más larga. Lo que está claro es que la potencia total de radiación decrece con la edad, ya sea con o sin nulos; este decrecimiento está probablemente directamente relacionado con la decadencia del campo del dipolo magnético. La emisión cesa cuando el campo desciende por debajo de un valor crítico.

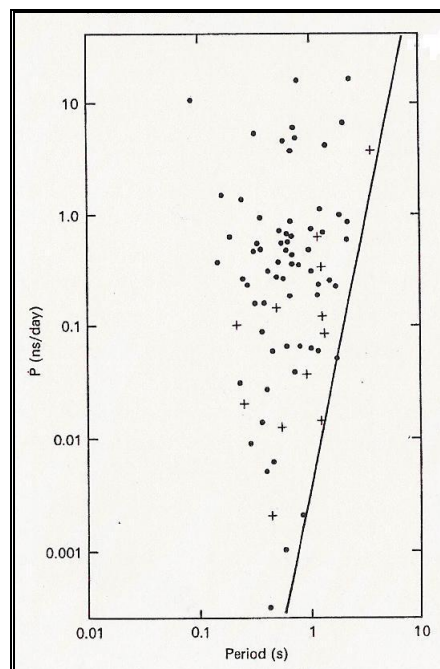


Ilustración 3.15: Diagrama P-P' (logarítmico). [7]

La Ilustración 3.15 muestra la derivada del periodo (P') en función del periodo (P) de los púlsares que presentan nulos o derivas. Estos púlsares aparecen con valores bajos de la derivada del periodo y mueren, como indica su nombre, cuando cortan la 'línea de la muerte', cesando las radio emisiones. [7] [18]

3.2.3.2 Cambio de modo

Como ya se ha comentado, algunos púlsares cambian de comportamiento, de tal manera que el perfil integrado conmuta entre dos formas diferentes. En la Ilustración 3.16 se muestran unos ejemplos. Un modo de cambio puede parecerse a una transición a un estado de 'nulling', desde un cese de radiación total hasta uno o más componentes identificables del perfil integrado; se puede considerar un nulo como un cambio de modo en el cual todas las componentes han desaparecido simultáneamente. Un cambio de modo, sin embargo, parece una redistribución de la excitación de unas cuantas componentes. Los cambios pueden ser observados en el comportamiento de los subpulsos, y particularmente en su tasa de deriva. Por ejemplo, el púlsar PSR 0031-07 muestra tres modos distintos, en los cuales los subpulsos derivan con tasas diferentes, así como los nulos; estos modos diferentes y la secuencia con la que ocurren los nulos, muestran que ambos tipos de fenómenos variables están íntimamente relacionados. [7]

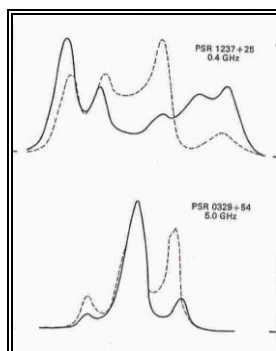


Ilustración 3.16: Cambios en el perfil integrado debido al cambio de modo en los púlsares PSR 1237+25 y PSR 0329+54 (Bartel et al.1982) [7]

3.2.3.3 Subpulsos

Los pulsos individuales de la mayoría de púlsares están compuestos de uno o más subpulsos, cada uno aproximadamente con una forma Gausiana lisa, con un ancho característico de sobre 2° de longitud rotacional. Este ancho es casi independiente de la frecuencia de radio.

La Tabla 1 muestra el ancho total para puntos con la mitad de la intensidad de los subpulsos típicos, junto con el ancho total del perfil integrado (acotado en este caso para los puntos al 10% de la intensidad). Para algunos púlsares, como el PSR 1929+10, el ancho de los subpulsos es casi igual que el ancho del perfil integrado; los pulsos individuales de este púlsar ocurren regularmente cerca de la misma longitud y con una forma muy similar. Para otros, como el PSR 0950+08, los subpulsos son muchos más estrechos que el perfil. (Vea Ilustración 3.13).

En el PSR 1133+16, el cual tiene un perfil formado por dos picos, los subpulsos ocurren preferiblemente en o cerca de las longitudes de los picos; el ancho de estos picos es determinado en gran parte por el ancho de los subpulsos.

Los subpulsos son interpretados como haces básicos de radiaciones provenientes de fuentes discretas, y su distribución en longitud dentro de la ventana del pulso como una distribución física en longitud del púlsar. [7]

PSR	W_{sub}°	W_{int}°	PSR	W_{sub}°	W_{int}°
0031-07	5.5	36	1642-03	2.7	7
0138+59	2.0	28	1706-16	1.2	12
0301+19	2.6	19	1749-28	2.9	8
0320+39	1.1	9	1818-04	4.6	11
0329+54	1.9	16	1821+05	2.7	20
0355+54	2.7	30	1831-03	4.6	34
0450-18	2.9	40	1857-26	4.1	42
0525+21	1.7	20	1900+01	6.4	13
0540+23	2.6	28	1907+10	6.3	14
0628-28	4.1	38	1911-04	3.1	6
0740-28	9.7	19	1919+21	1.6	11
0809+74	3.8	26	1920+21	2.9	13
0818-13	1.5	12	1929+10	2.0	24
0820+02	1.9	17	1933+16	1.9	12
0823+26	2.4	10	1944+17	6.5	37
0826-34	4.4	190	1946+35	6.4	24
0834+06	1.1	9	2002+31	1.9	5
0919+06	2.4	20	2016+28	2.4	14
0943+10	2.5	21	2020+28	2.9	18
0950+08	5.2	31	2021+51	2.4	22
1112+50	1.1	9	2045-16	1.1	17
1133+16	0.8	12	2111+46	9.1	11
1237+25	0.8	15	2154+40	3.3	26
1508+55	3.0	7	2217+47	3.1	11
1540-06	1.1	10	2303+30	1.3	8
1541+09	13.7	24	2310+42	1.4	16
1604-00	2.7	17	2319+60	2.4	25

Tabla 1: Anchos de subpulsos y de los pulsos del perfil integrado en grados de rotación. [7]

3.2.3.4 Deriva y modulación

En muchos de los púlsares con periodos largos, como el PSR 0809+74 y el PSR 0031-07 (Ilustración 3.17), pulsos sucesivos contienen subpulsos los cuales aparecen progresivamente cambiando de longitud. Esta marcha de los subpulsos a través de la ventana del perfil integrado es mostrada en el diagrama idealizado de la Ilustración 3.18. El periodo del pulso normal es llamado P_1 y el espacio entre los subpulsos dentro de un pulso simple P_2 . La tasa de deriva D ($D=P_2/P_3$) trae sucesivos subpulsos a la misma longitud a intervalos P_3 . La deriva de periodicidad P_3 se expresa usualmente en términos de P_1 .

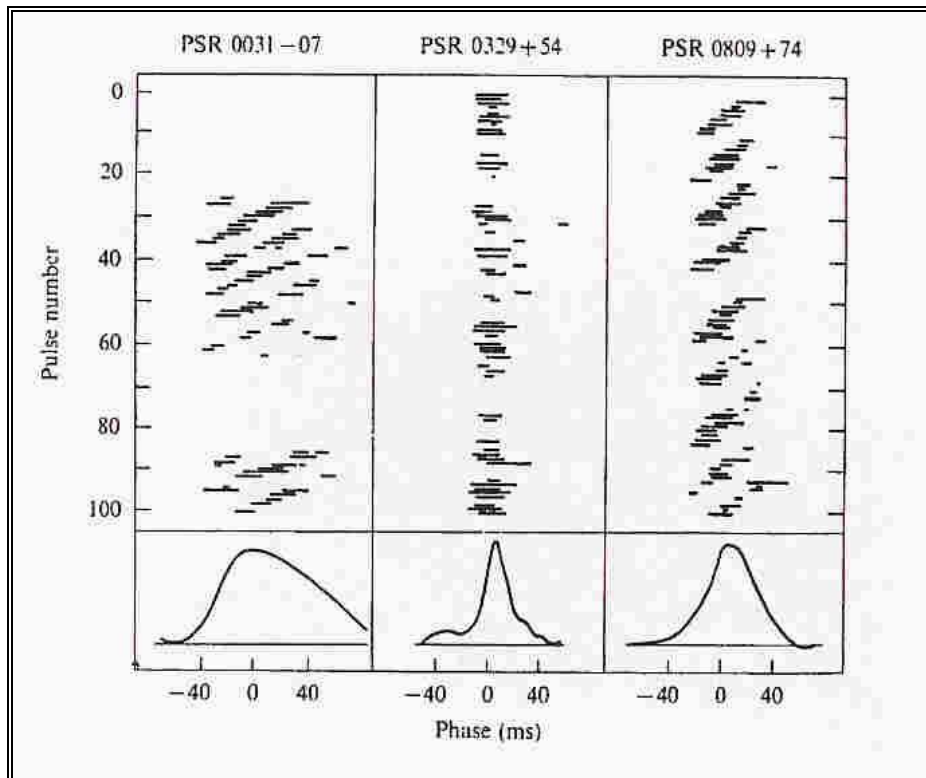


Ilustración 3.17: Deriva y 'nulling'. [7]

Cada línea horizontal está centrada en el tiempo esperado de llegada, con el tiempo aumentando hacia abajo y a la derecha. Se muestra la posición de cada subpulso. PSR 0031-07 y PSR0809+74 son típicamente derivantes. PSR 0031-7 muestra largos nulos que duran sobre veinte pulsos (Taylor & Huguenin 1971).

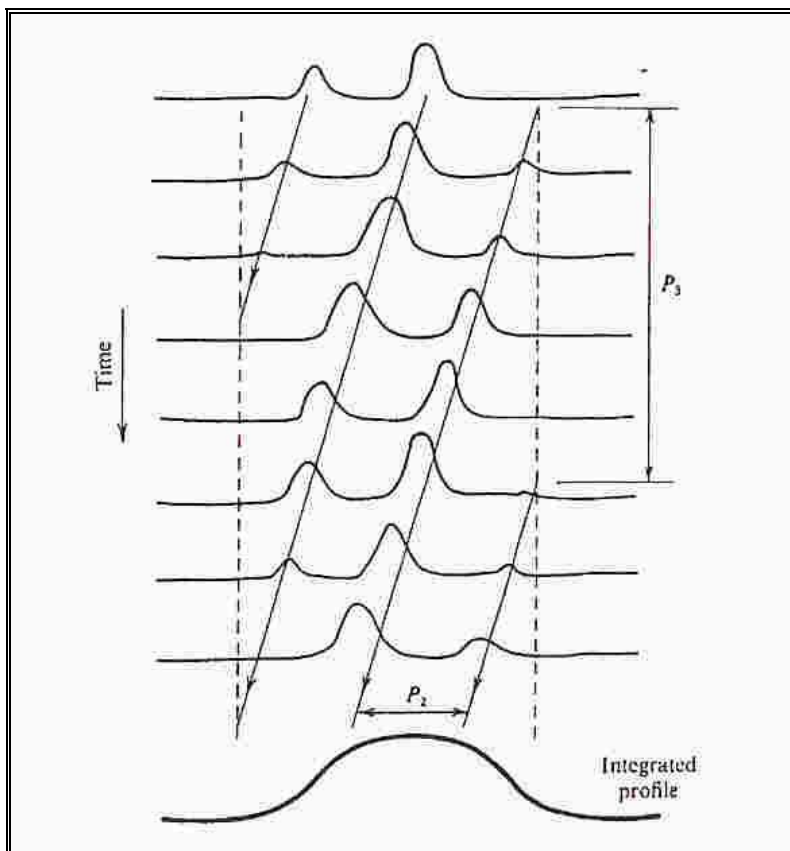


Ilustración 3.18: Patrón idealizado de la deriva de los subpulsos. [7]

En la Ilustración 3.18 sucesivos pulsos aparecen al periodo fundamental P_1 . El patrón se repite con un intervalo de P_3 . Los subpulsos están separados por un intervalo típico de P_2 .

El ciclo de repetición en el intervalo P_3 puede ser observado como una modulación de la potencia del pulso integrado (Ilustración 3.20). Esta modulación es a menudo más obvia si se analiza un rango limitado de longitudes.

La Ilustración 3.19 muestra el resultado del análisis de Fourier, a intervalos de cinco longitudes discretas, de un tren largo de pulsos del PSR 1237+25. Aquí la periodicidad característica $P_3 = 3P_1$ muestra una modulación en frecuencia a 0.35 ciclos por periodo P_1 .

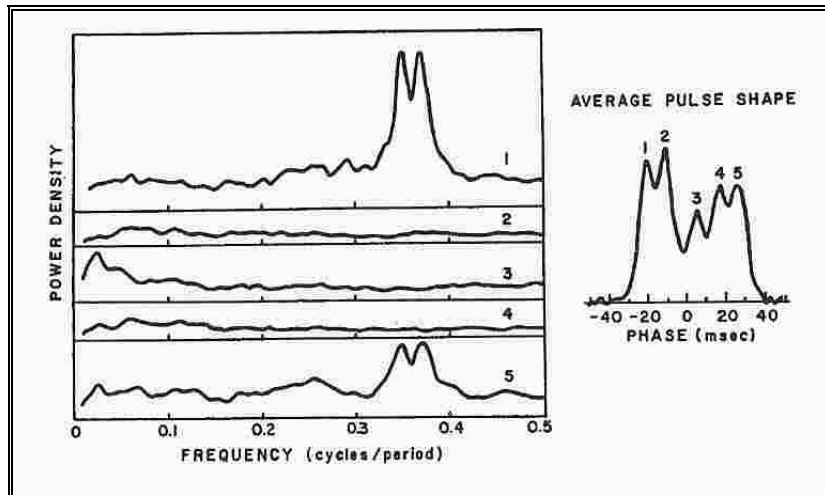


Ilustración 3.19: Modulación periódica de intensidad en un púlsar con deriva no aparente. [7]

La Ilustración 3.20 muestra un análisis de Fourier de las intensidades de un tren largo de pulsos de cuatro púlsares. El periodo P_3 está bien definido en PSR 0809+74 y en PSR 0943+10. La deriva es más compleja en PSR 0031-07 e irregular en PSR 1133+16.

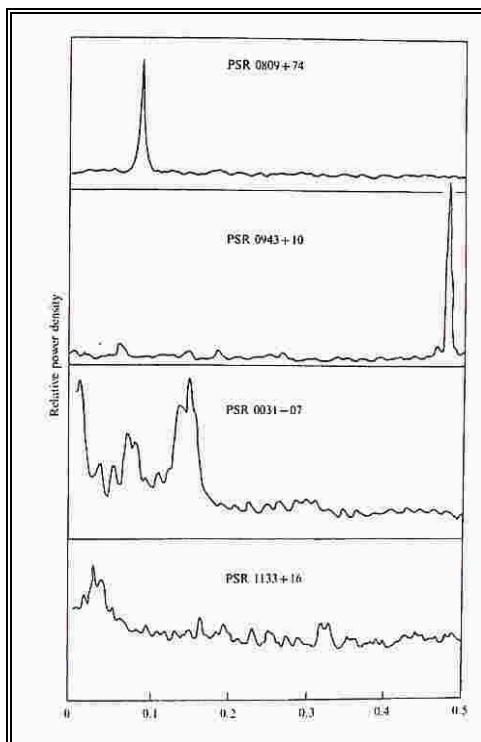


Ilustración 3.20: Modulación periódica de intensidad a la frecuencia de deriva.
[7]

Hay muchos ejemplos de púlsares en los cuales P_3 es cercano a 2 veces P_1 , con el resultado de que los pulsos son alternativamente fuertes y débiles. Un análisis de Fourier de la potencia total del púlsar PSR 0943+10, por ejemplo, muestra una modulación dominante a 0.473 ciclos por P_1 (Ilustración 3.20).

En muchos casos es difícil distinguir esta frecuencia de la frecuencia alias⁶ 0.527 ciclos por P_1 ; las dos posibilidades corresponden a la deriva en diferentes direcciones a tasas levemente diferentes.

La modulación periódica puede ser observada en los componentes exteriores de algunos pulsares sin aparente deriva. El ejemplo más conocido es el PSR 1237+25, mostrado en la Ilustración 3.19, donde se muestra como en una serie de pulsos los componentes exteriores del pulso varían con un ciclo de 0.36 periodos del pulso. Los componentes interiores no fluctúan. [7]

3.2.3.5 Tasa de deriva

La Tabla 2 presenta la tasa de deriva D en unidades de grado de longitud por rotación para pulsares cuya deriva ha sido constantemente observada. La tabla además muestra los datos de P_1 , P_2 y P_3 . La precisión para D es sobre el 10% para la mayoría de estos pulsares. Algunos pulsares muestran más de una tasa de deriva: en estos casos la componente P_2 no cambia y el cambio de P_3 es inversamente proporcional a la tasa de deriva.

Los pulsares PSR 0031-07 y PSR 2319+60 muestran cada uno tres distintos valores de tasa de deriva correspondientes a tres modos diferentes. En ambos pulsares la sucesión de modos tiende a seguir un patrón definido incluyendo un nulo, como se ve para PSR 0031-07 en la Ilustración 3.17.

⁶ En la reconstrucción de datos analógicos, una componente falsa de baja frecuencia resultante de una baja frecuencia de muestreo; por ejemplo, menor que la requerida por el teorema de muestreo. Suele suceder porque las señales prácticamente nunca son limitadas estrictamente en banda. [19][20]

La tasa de deriva para muchos púlsares varía significativamente a través del rango de longitudes que cubre el perfil integrado. En la Tabla 2, dos distintas tasas son estimadas para dos componentes internos del PSR 1237+25; este es un ejemplo extremo, es más usual encontrar una variación del orden del 20% en la tasa de deriva a través del perfil. La deriva es más común verla en las componentes externas al perfil.

La dirección de la deriva es indicada por el signo en la tabla, donde el signo + significa una tasa desde el nacimiento hacia el desvanecimiento del perfil. Las observaciones de Ritchings y Lyne (1975) sugieren una distinción entre púlsares con altos valores para la derivada del periodo P' , los cuales muestran una deriva positiva, y los púlsares con valores bajos para P' , los cuales muestran una deriva negativa. [7]

PSR	P_1 (s)	P_2 (ms)	P_3 periods	D (deg/ P_1)	Ref.
0031-07	0.94	21	12.5 6.8 4.0	-1.7 ± 0.2 -3.2 ± 0.6 -5.3 ± 1.1	WF
0148-06	1.46	32	14 7	-0.57 -0.30	BHMM
0301+19	1.39	24	6.4	-0.96	SS
0320+39	3.03	22	8.5	$+0.31 \pm 0.2$	MA
0525+21	3.75	27	4	-0.7 ± 0.2	MA
0809+74	1.29	47	11.1	-1.2 ± 0.2	URWE
0818-13	1.24	14.5	4.4	-3.0 ± 0.1	MA
0820+02	0.87	16	4.9	$+1.2 \pm 0.4$	MA
0826-34	1.84	148	irreg	irreg	BMHML
0834+06	1.27	3.5	2.16	$+0.25 \pm 0.16$	MA
0943+10	1.10	25	2.11	$+4.0 \pm 0.1$	SO
1237+25	1.38	41(Cpt1) 85(Cpt2)	2.8 2.8	3.8 ± 1.0 7.3 ± 1.5	BSW
1540-06	0.71	4.6	3.07	0.8 ± 0.15	MA
2303+30	1.58	22	2.0	-2.4 ± 0.1	MA
2310+42	0.35	3.9	2.05	$+1.8 \pm 0.3$ (or -2.1 ± 0.3)	MA
2319+60	2.26	38	8 4 3	0.8 ± 0.2 1.3 ± 0.6 2.0 ± 0.7	WF

References:
 BHMM = Biggs, Hamilton *et al.* (1985)
 BMHML = Biggs, McCulloch *et al.* (1985)
 MA = Ashworth, unpublished data from Jodrell Bank
 WF = Wright & Fowler (1981)
 SS = Schonhardt & Sieber (1973)
 URWE = Unwin *et al.* (1978)
 SO = Sieber & Oster (1975)
 BSW = Bartel *et al.* (1980)

Tabla 2: Parámetros de deriva [7]

3.2.3.6 La polarización de los subpulsos

Los subpulsos están generalmente más altamente polarizados que los perfiles integrados; la diferencia se explica por la variabilidad de la polarización de sucesivos subpulsos y por las variaciones dentro de los subpulsos individuales. Los registros de las polarizaciones de subpulsos individuales de Manchester, Taylor y Huguenin (1975) demuestran claramente estos efectos. La Ilustración 3.21(a) muestra un púlsar altamente polarizado, PSR 1929+10. Aquí los pulsos individuales son completamente polarizados elípticamente, con el pequeño cambio a través de la duración del subpulso. La Ilustración 3.21(b) muestra una situación similar en PSR 0031-07, en el cual hay una deriva organizada. Aquí la polarización varía a través de la ventana del perfil integrado pero hay además algunas variaciones adicionales dentro de los subpulsos. Taylor et al. (1971) encontró que hay un barrido organizado de ángulos de posición dentro de los pulsos individuales además de un barrido esperado de la polarización del perfil integrado. Parece que el barrido total dentro de un subpulso individual es típicamente menos de 30° , en éste y otros púlsares.

Si el ángulo de posición varía monótonamente a través del pulso implica el origen cercano al polo magnético, mientras que una polarización más compleja implica campos magnéticos más complejos.

Finalmente, la Ilustración 3.21(d) muestra PSR 1919+21, el cual demuestra que la confusión aumenta al superponer muchos subpulsos diferentes en un único pulso. Es razonable suponer que los subpulsos individuales, los cuales contribuyen tanto como un pulso, son altamente polarizados de una forma simple, y que se observan como un número de fuentes diferentes simultáneas. [7] [8]

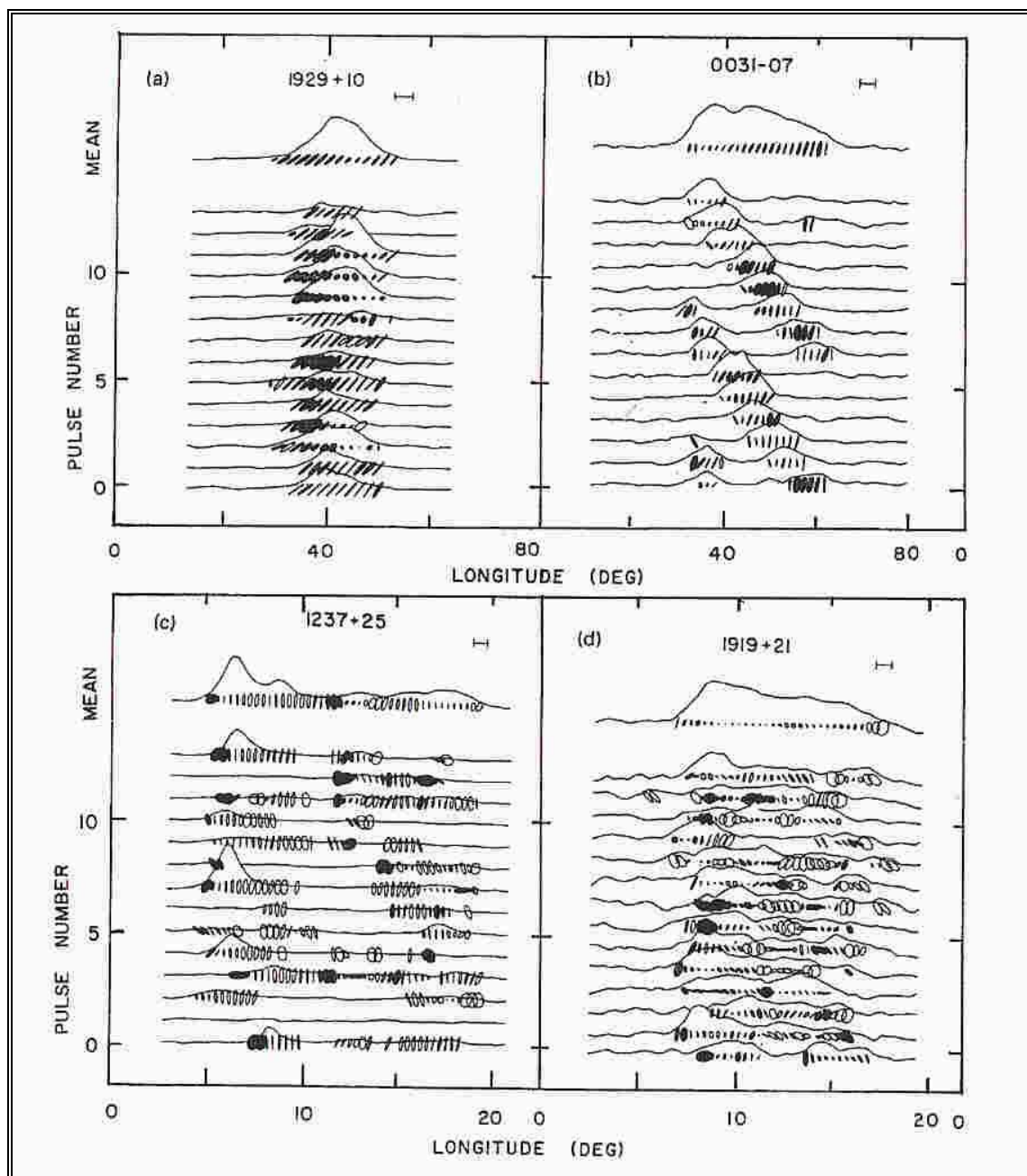


Ilustración 3.21: Polarización de subpulsos individuales de cuatro púlsares comparado con su perfil integrado. [7]

3.2.3.7 La microestructura

A las más altas resoluciones posibles y más usualmente a las bajas frecuencias, los pulsos individuales de algunos púlsares presentan estructuras en una escala de tiempo considerablemente más corta que los subpulsos. Estas estructuras son conocidas como microestructuras. Observaciones detalladas son sólo posibles para los más intensos púlsares; incluso para estos hay algunas dificultades que resolver para los componentes más cortos del pulso, o micropulsos, los cuales pueden tener unos cuantos microsegundos de ancho.

Los micropulsos observados ocurren a menudo en grupos cortos casi periódicos, con una periodicidad del orden de la mitad de un milisegundo. Es muy significativo que esta periodicidad se encuentre independiente de la frecuencia de observación, como se puede ver en el ejemplo de la Ilustración 3.22, donde se muestra un pulso simple del PSR 0950+08 a 430 MHz y 1406 MHz.[7]

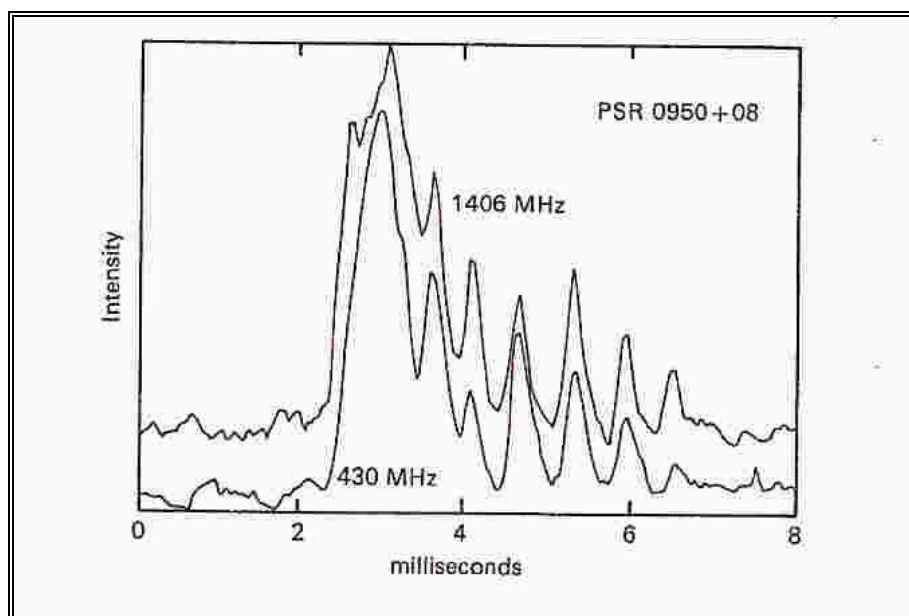


Ilustración 3.22: Un tren periódico de micropulsos del PSR 0950+08, registrado simultáneamente a 430 MHz y 1406 MHz (Boriakoff et al. 1981). [7]

3.2.3.8 Caracterización del púlsar

A pesar de que los pulsares presenten a nivel de pulsos individuales todas estas irregularidades en intensidad, modo, frecuencia y polarización, el perfil que se obtiene al integrar múltiples de estos pulsos es muy estable y caracteriza a cada pulsar de manera inequívoca.

3.3 Aspectos técnicos

Hay un gran número de problemas técnicos que han de ser vencidos antes de poder conseguir datos precisos de los púlsares.

En primer lugar, los pulsos han de pasar a través del medio interestelar, el cual les causa dispersión, así que las radio frecuencias bajas son retrasadas respecto a las altas frecuencias, como resultado se produce el ensanchamiento de los pulsos cuando son observados con un receptor de banda ancha. La observación en canales de banda estrecha permite que los efectos de la dispersión sean eliminados, como veremos más adelante.

En segundo lugar, los pulsos son tan débiles después de viajar durante cientos o miles de años, que se tienen que observar con enormes radiotelescopios e integrando, típicamente en intervalos de unos cuantos minutos, para conseguir una tasa de SNR satisfactoria. [10]

3.3.1 El medio interestelar

3.3.1.1 Dispersión frecuencial

Las ondas de radio se propagan a través del espacio interestelar encontrándose a su paso con nubes tenues de gas ionizado, cuyo índice de refracción difiere apreciablemente de la unidad.

El efecto que provoca es un retardo en la llegada del radio pulso, dependiendo de la frecuencia de observación y del contenido total de electrones de la trayectoria de propagación. La propagación dispersiva en el medio interestelar hace que el tiempo de llegada del pulso dependa de la frecuencia de observación, f , de acuerdo con la expresión:

$$t = \frac{L}{c} + Df^{-2} \quad \text{Ecuación 3.1}$$

Donde el primer término es únicamente el tiempo que tardaría en viajar la señal por el espacio libre ('L' sería la distancia entre el observador y el púlsar y 'c' la velocidad de la luz) y el segundo término es el retardo adicional provocado por la dispersión. D es la constante de la dispersión, la cual es directamente proporcional a la densidad de la columna de electrones libres de la línea de mira.

Un púlsar típico observado a 1kpc de medio interestelar tiene una $D \cong 10^{17} \text{s}^{-1}$; consecuentemente la diferencia de retardo $|\Delta t| = 2Df^{-3}\Delta f$ a través de incluso un modesto ancho de banda, como $\Delta f = 10^7 \text{Hz}$, puede llegar a ser mucho más grande que el ancho intrínseco del pulso de un púlsar milisegundario. Para prevenir excesivas dispersiones de los pulsos, los observadores incorporan algún tipo de hardware o software compensador de dispersión, o ambos, en los sistemas de adquisición de datos, como veremos en el punto 3.3.6. [7] [17]

3.3.1.2 Scintillation

Además, el medio interestelar es turbulento, con estructuras irregulares a muchas escalas. Las ondas de radio no se propagan por un solo camino. La propagación multicamino, a través de las nubes de electrones, ensancha el tiempo de llegada de los pulsos, especialmente apreciable en los púlsares de fuera del plano galáctico. Una pequeña cantidad de diseminación puede producir mayores efectos a través de interferencias entre ondas cuyas longitudes difieren poco; este fenómeno se conoce como 'scintillation'. Las turbulencias a grandes escalas producen variaciones bajas de intensidad mientras que las de escalas pequeñas producen desvanecimientos rápidos. Las escalas de tiempo de estos dos tipos de desvanecimientos depende de la frecuencia de observación; a bajas frecuencias pueden ser años y minutos respectivamente. [7]

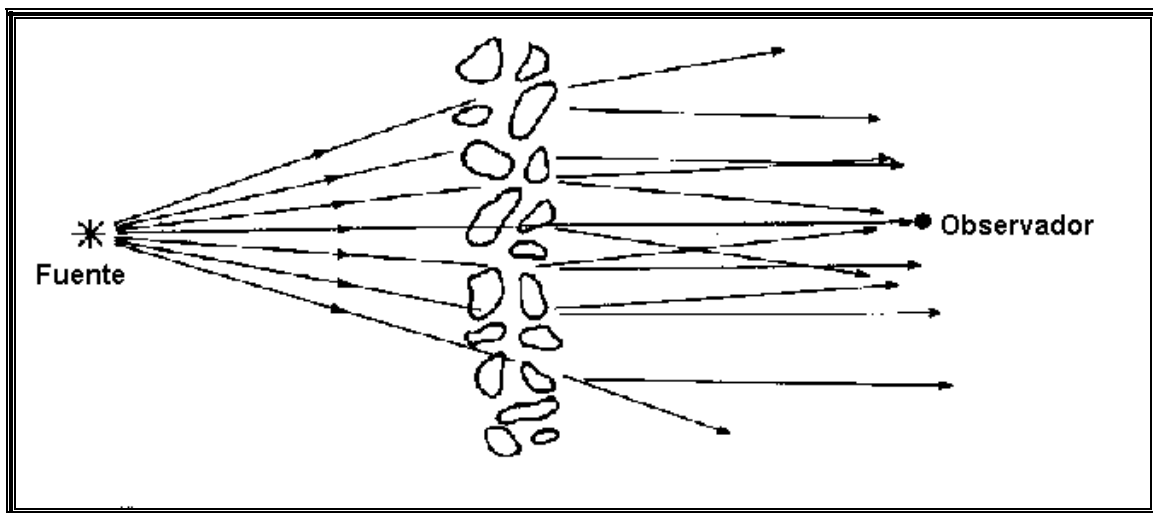


Ilustración 3.23: Propagación multicamino [21]

3.3.1.3 La rotación Faraday

La rotación Faraday⁷ del plano de la polarización lineal ocurre además en la línea de mira de todos los púlsares, debido al efecto combinado de los electrones y del campo magnético interestelar. La medición combinada de la dispersión y de la rotación, ambos obtenidos en observaciones multifrecuencia, dan directamente un valor medio de la componente del campo magnético en la línea de mira. Estas mediciones revelan campos magnéticos de unos cuantos microgauss. [5] [17]

3.3.2 Densidad de Flujo

Midiendo la distribución de la energía irradiada por los púlsares sobre un rango de frecuencias lo más extenso posible, se puede obtener mucha información. De acuerdo con la ecuación general para el estudio de los espectros particulares de las fuentes astronómicas se tiene:

$$S \propto \lambda^n \quad \text{Ecuación 3.2}$$

donde λ es la longitud de onda de la radiación considerada (m). Según esta ecuación, el espectro térmico está caracterizado por un valor de $n=-2$ y en los espectros no térmicos el valor de n es mayor que cero. A este valor de n se le llama índice espectral.

⁷ La rotación de Faraday se produce cuando la señal atraviesa una nube de electrones, estos producen en la señal cambios de fase y atenuación. La rotación de Faraday es directamente proporcional al contenido de electrones que se encuentra la señal en su propagación y depende de la frecuencia de la señal de radio (especialmente importante en la propagación de las ondas de radio por debajo de los 40MHz). [22]

Los pulsares tienen en general un espectro de baja potencia, con índices espectrales n desde -3 hasta -0.1 , con un valor medio de ~ -1.7 . El pulsar más fuerte a 1GHz tiene una densidad de flujo de 1.7Jy^8 ($1\text{Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$). En la Ilustración 3.24 se muestra el espectro de una selección de púlsares entre 0.1 y 10GHz. Como se puede observar la densidad de flujo cae con el aumento de la frecuencia. [4] [23]

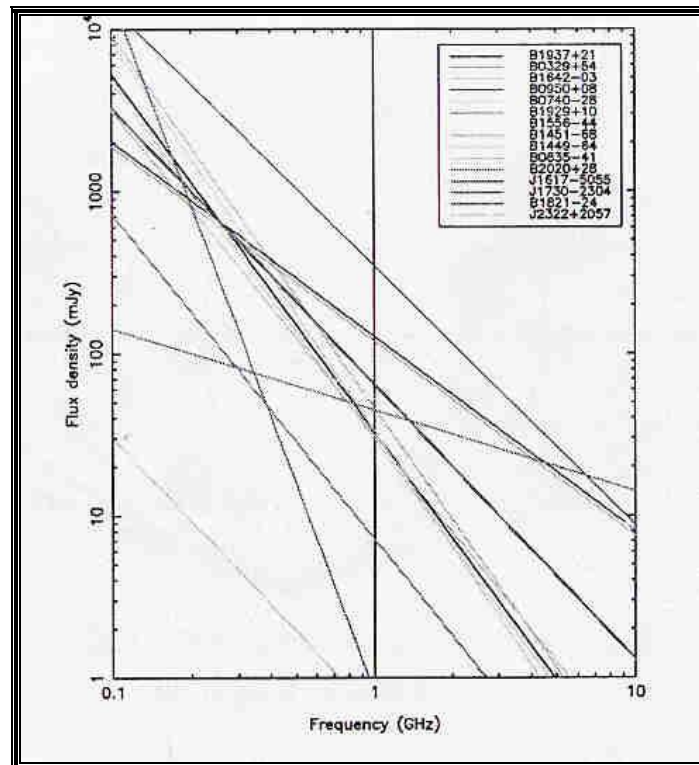


Ilustración 3.24: Densidad de flujo de 15 pulsares en función de la frecuencia.
[4]

⁸ La unidad de potencia con la que se miden las emisiones recibidas es dada por la cantidad de energía que recibe 1m^2 de superficie en vatios, y una banda pasante de un Hz. Esta unidad es exageradamente grande para las mediciones de la potencia recibida desde las radiofuentes, por lo que se usa una unidad submúltiplo que es el Jansky. [24]

3.3.3 Potencia espectral media

La potencia espectral media sobre un periodo del pulsar, $w_{p,T}$, recibida por la antena proveniente del pulsar la podemos escribir como:

$$w_{p,T} = \frac{1}{2} A_e S_{v,T} \quad \text{Ecuación 3.3}$$

El factor $\frac{1}{2}$ es exacto para las emisiones no polarizadas. Teniendo en cuenta el grado de polarización de las radiaciones de los pulsares, $\Pi = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2} / I$ (en términos de los parámetros de Stokes)⁹, el factor de corrección tiene un rango que va desde $(1-\Pi)/2$ hasta $(1+\Pi)/2$, dependiendo de la polarización de la radiación del pulsar y de la polarización de la antena. [4]

3.3.4 Ruido del sistema

La potencia del ruido equivalente w_n en los terminales de la antena puede ser expresada en términos de la temperatura de ruido del sistema $T_{sys}(K)$ como:

$$w_n = kT_{sys} \quad \text{Ecuación 3.4}$$

donde k es la constante de Boltzmann. Las dos contribuciones a la temperatura del sistema son la temperatura T_{rx} del receptor y la del cielo T_{sky} ,

$$T_{sys} = T_{rx} + T_{sky} \quad \text{Ecuación 3.5}$$

⁹ El estado de polarización puede caracterizarse convenientemente mediante cuatro cantidades que pueden ser medidas acoplando un polarímetro al telescopio. Estas cantidades "observables" son los cuatro parámetros de Stokes (I,Q,U,V) en función de la longitud de onda. [25]

3.3.4.1 Temperatura del cielo

La temperatura del cielo explica las radiaciones que llegan a la antena y que no provienen del pulsar. Tiene dos principales contribuciones constantes, la radiación isotrópica cósmica de fondo, $T_{cbg}=2.7$ K (independiente de la frecuencia) y la radiación de fondo de la Galaxia, T_{gal} , añadida a una contribución variable proveniente de los miembros del Sistema Solar, T_{sso} ,

$$T_{sky} = T_{cbg} + T_{gal} + T_{sso} \quad \text{Ecuación 3.6}$$

Los objetos más brillantes del Sistema Solar son el Sol y Júpiter, los cuales emiten radiaciones variables no termales y pueden ser muy brillantes a radio frecuencias. [4]

3.3.4.1.1 Radiación Galáctica

La radiación galáctica de fondo no es termal por lo tanto su temperatura de luminosidad depende fuertemente de la frecuencia de observación. En la dirección al centro de la Galaxia (GC), la temperatura se puede estimar en 40k a 1GHz, mientras que en la dirección contraria (AC) y hacia los polos galácticos (GP) la temperatura es diez veces menor ($T_G(AC) \cong 5K$ y $T_G(GP) \cong 3K$).[4]

3.3.4.1.2 Radiación del Sistema Solar

Las emisiones de radio del Sol consisten en una componente fija (el Sol en estado de reposo), una componente que varía lentamente relacionada con una actividad solar de 11 años de ciclo entre su actividad máxima y mínima, y finalmente, una componente de variación rápida consistente en explosiones relacionadas con llamaradas solares, especialmente importantes a frecuencias de decenas de MHz.

Por su lado Júpiter es una fuente muy fuerte y esporádica a longitudes de onda de decámetros. Sin embargo, para frecuencias alrededor de 1GHz, Júpiter es mucho más débil y su flujo no depende tanto de la frecuencia.

La densidad de flujo de Júpiter es tres órdenes de magnitud menos que la del Sol, con un efecto negligible en la SNR. El resto de planetas son todavía más débiles que Júpiter. [4]

3.3.4.2 Temperatura del receptor

La temperatura del receptor depende de la frecuencia de observación. A bajas frecuencias el límite es debido a la temperatura física. Utilizando un receptor conservador a bajas frecuencias el límite será de 30K. A altas frecuencias el límite del ruido cuántico es relevante, $h\nu/k$. La tecnología actual puede superar seis veces este límite. Por lo tanto, consideramos la temperatura del receptor como [4]:

$$\left[\frac{T_{rx}}{K} \right] = 30 + 6 \frac{h\nu}{k} = 30 + 0.29 \left[\frac{\nu}{GHz} \right] \quad \text{Ecuación 3.7}$$

3.3.5 Tasa de SNR

Podemos expresar la tasa de SNR de la observación de un pulsar como la tasa de la potencia espectral media $w_{p,T}$ ($W \text{ Hz}^{-1}$) recibida por la antena proveniente del pulsar (promediada sobre un periodo de pulsar T), $w_{p,T} \equiv \sigma_{p,T}^2$, y la equivalente potencia espectral media del ruido w_n en los terminales de la antena, $w_n \equiv \sigma_n^2$,

$$SNR = \frac{\sigma_{p,T}^2}{\sigma_n^2} = \frac{w_{p,T}}{w_n} \quad \text{Ecuación 3.8}$$

Teniendo en cuenta lo visto en los puntos anteriores podemos escribir la SNR como:

$$SNR = \frac{1}{2K} A_e S_{v,T} T_{sys}^{-1} \quad \text{Ecuación 3.9}$$

donde k es la constante de Boltzmann ($k=1.38 \times 10^{-23} \text{ W Hz}^{-1} \text{ K}^{-1}$), A_e es el área efectiva de la antena, $S_{v,T}$ es la densidad de flujo media sobre el periodo del pulsar, y T_{sys} (K) es la temperatura del sistema, la cual tiene en cuenta el ruido del receptor y la radiación captada por la antena y que no proviene del pulsar. En unidades prácticas, la última ecuación se convierte en:

$$SNR = 3.6 \times 10^{-4} \left[\frac{A_e}{m^2} \right] \left[\frac{S_{v,T}}{Jy} \right] \left[\frac{T_{sys}}{K} \right]^{-1} \quad \text{Ecuación 3.10}$$

Para una antena con un área efectiva de $10m^2$, una densidad de flujo de $100mJy$ y una temperatura de sistema de $40K$, el resultado es de una SNR de 9.0×10^{-6} o lo que es lo mismo $-50dB$. [4]

3.3.6 Técnicas experimentales

Las observaciones temporales de los púlsares son invariablemente limitadas por esta baja SNR, así que quien mejor las lleva a cabo son los grandes radiotelescopios (como el reflector esférico de $305m$ del Observatorio de Arecibo en Puerto Rico). El espectro de RF hace difícil observar las fuentes a frecuencias por encima de $3GHz$, mientras que las condiciones de propagación y del ruido de fondo galáctico resultan molestas por debajo de $0.3GHz$. Por tanto, las observaciones temporales son llevadas a cabo normalmente dentro de esta década de intervalo frecuencial. La tasa de SNR aumenta como la raíz cuadrada del total del ancho de banda del receptor.

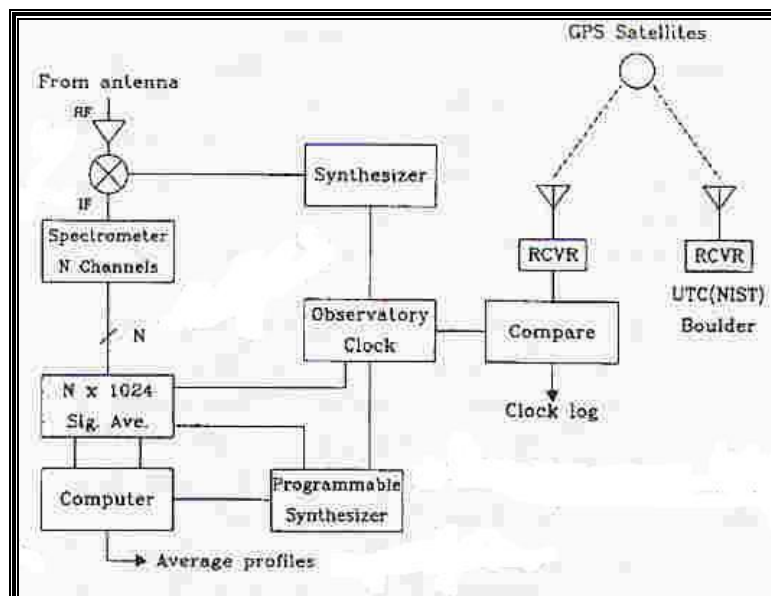


Ilustración 3.25: Diagrama de bloques simplificado del equipamiento de alta precisión temporal para pulsares usado en el observatorio de Arecibo. [17]

En la Ilustración 3.25 se muestra un diagrama de bloques del equipo utilizado por el Observatorio de Arecibo para las observaciones temporales de los pulsares regulares. Las señales de radio frecuencia captadas por la antena son amplificadas, convertidas a una frecuencia intermedia y pasadas a través de un espectrómetro multicanal. Los promediadores digitales acumulan las estimaciones de la forma de onda periódica media de un pulsar en cada uno de los canales usando circuitería bajo el control de un pequeño ordenador y sincronizado de forma precisa con el tiempo del observatorio y con la frecuencia estándar.

Un sintetizador programable, cuya frecuencia de salida es actualizada cada segundo de manera que la fase sea continua, compensa los cambios debidos al efecto Doppler¹⁰ causados por el movimiento del púlsar y del observatorio. Los perfiles integrados son registrados cada pocos minutos, junto con las etiquetas de tiempo apropiadas.

La Ilustración 3.26 presenta un ejemplo a grosso modo de datos registrados. La figura muestra los perfiles integrados del púlsar milisegundario PSR 1937+21 para los 32 canales frecuenciales, con un rango que va desde 2.36 hasta 2.40 GHz. Incluso en este tiempo de integración corto de dos minutos la tasa de SNR es razonablemente alta. El pulso principal y el interpulso del PSR 1937+21 son distinguibles en la mayoría de los canales. [17]

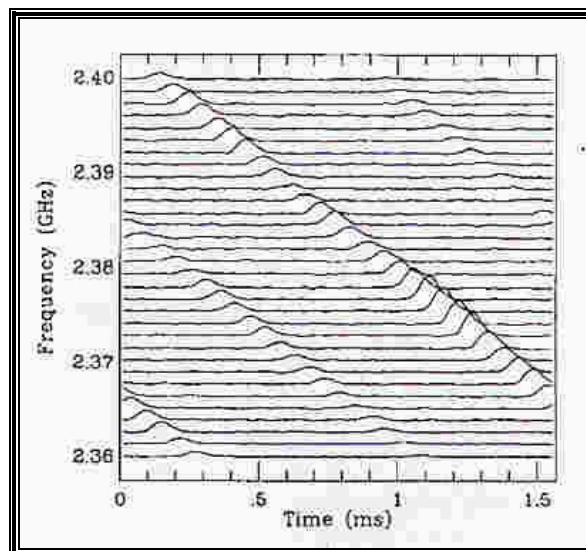


Ilustración 3.26: Perfiles del PSR 1937+21 [17]

¹⁰ Consiste en la variación de la longitud de onda de cualquier señal emitida o recibida por un objeto en movimiento. Para el caso de ondas sonoras el tono de un sonido emitido por una fuente que se aproxima al observador es más agudo que si la fuente se aleja. [20] [23]

Los datos de la Ilustración 3.26 han sido obtenidos en un tiempo de integración de 2 minutos de la señal proveniente del PSR 1937+21, usando el telescopio de Arecibo a 2.4GHz. Un espectrómetro de 32 canales divide la señal en segmentos de 1.25MHz. La propagación dispersiva en el medio interestelar causa un aumento del retardo a bajas frecuencias, de acuerdo con la ecuación del punto 3.3.1. Las variaciones de la energía de la señal canal a canal son causadas por la “scintillation” de la señal en el medio interestelar.

[17]

4 MODELO DE SEÑAL

4.1 Modelo de señal estocástico

Una vez vistas las propiedades del pulsar, nos centraremos en el desarrollo de los algoritmos que verificaremos a través de las simulaciones. El primer paso para la formulación de los algoritmos de sincronización es el conocimiento del modelo de señal y el establecimiento de una notación práctica para caracterizar la señal del pulsar. En este capítulo, se elaboran los modelos de la señal de pulsar para banda ancha y estrecha en términos de procesos estocásticos¹¹ cicloestacionarios¹².

¹¹ Un proceso estocástico o aleatorio es un concepto matemático que sirve para caracterizar y estudiar todo tipo de fenómenos aleatorios (estocásticos) que evolucionan, generalmente, con el tiempo. Dado un experimento con cierto espacio muestral Ω , asignaremos a cada suceso elemental ξ una función $x(\xi, t)$, es decir, al resultado le asignamos una función que depende del tiempo (además de depender también del resultado del experimento). En otras palabras, un proceso estocástico es una colección de funciones a cada una de las cuales se le llama realización del proceso. [26] [20]

¹² En general, se dice que un proceso aleatorio es estacionario cuando sólo depende de la diferencia de tiempos (τ) y no del origen de tiempos (t). Se dice que un proceso es estacionario en sentido estricto cuando sus propiedades son independientes del origen de tiempos. La estacionariedad implica que la función de densidad de probabilidad de orden 1 es independiente del tiempo, es decir, todas las muestras están equidistribuidas:

$$f_x(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n), \dots) = f_x(x(t_1 + \varepsilon), x(t_2 + \varepsilon), \dots, x(t_n + \varepsilon), \dots) \quad \forall \varepsilon, \forall n$$

Un proceso es estacionario en sentido amplio cuando cumple que la media del proceso es constante y que la autocorrelación sólo depende de la diferencia de tiempos [26]:

$$E x(t) = m_x = cte. \quad R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau), \text{ siendo } \tau = t_1 - t_2$$

La cicloestacionariedad¹³ es referida a la variación periódica en las estadísticas de la señal del púlsar, las cuales captan completamente la naturaleza estable de pulsación de la fuente. En la siguiente ilustración se muestra el esquema completo del receptor:

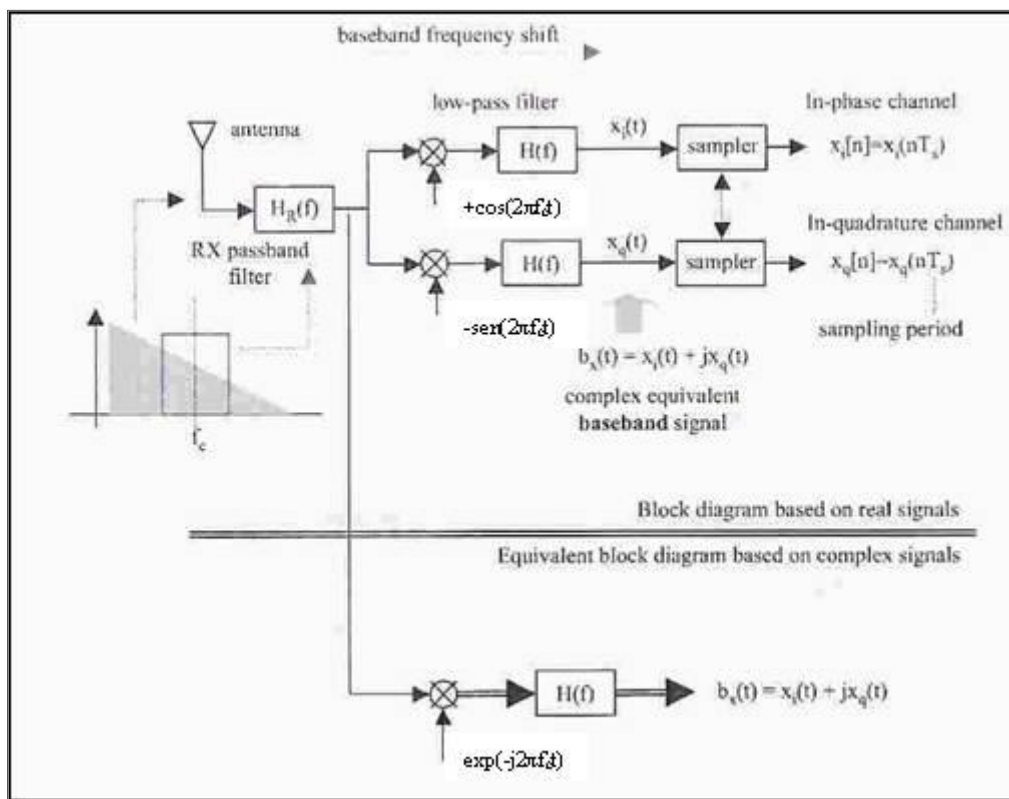


Ilustración 4.1: Esquema del receptor [4]

¹³ Son procesos cicloestacionarios aquellos que dependen de forma periódica de la variable temporal t , cumpliendo: $m_x(t) = m_x(t + T_1)$ y $R_{xx}(t + \tau, t) = R_{xx}(t + \tau + T_2, t + T_2)$ donde T_1 y T_2 son los periodos de la media y de la autocorrelación respectivamente. Además se debe cumplir que ambos periodos sean iguales o en su defecto que uno sea múltiplo del otro, es decir: $nT_1 = mT_2$. [29]

En la Ilustración 4.1 se puede observar: en la parte superior el esquema de procesamiento de señal generador de las componentes en fase y en cuadratura de la radio señal en banda base a la frecuencia central f_c , en la parte inferior la representación equivalente en la notación compleja usada en este documento. Este esquema, conocido como muestreo IQ¹⁴, es el utilizado más adelante para entender las operaciones del receptor. En las implementaciones tecnológicas sería usado el muestreo IF¹⁵.

El procesamiento de señal para radio pulsares se lleva a cabo en banda base, después de la conversión del filtro pasabanda a la salida de la antena. Las señales son representadas en términos de componentes en fase y cuadratura, $x_i(t)$ y $x_q(t)$ de la señal de pulsar pasabanda a la frecuencia central f_c . La señal pasabanda es representada como:

$$x(t) = x_i(t) \cos(2\pi f_c t) - x_q(t) \sin(2\pi f_c t) = \text{Re}(b_x(t) e^{j2\pi f_c t}) \quad \text{Ecuación 4.1}$$

donde la señal equivalente banda base es $b_x(t)$ correspondiente a la salida del receptor y que contiene las componentes en fase y cuadratura expresadas como $b_x(t) = x_i(t) + jx_q(t)$. Esta representación permite reconstruir la señal original pasabanda de $x(t)$ preservando toda la información de interés. La estructura del receptor se ha mostrado en la Ilustración 4.1.

¹⁴ Muestreo IQ: generación analógica de las componentes en fase y cuadratura y muestreo independiente de estas. [28]

¹⁵ Muestreo IF: muestreo directo de la señal paso banda (o con conversión analógica previa a la frecuencia intermedia). [28]

Más adelante se mostrará que no se dispone de la información experimental completa para caracterizar las estadísticas de segundo orden de la señal del púlsar. Con este propósito, se llevará a cabo un estudio detallado de la matriz de correlación del proceso cicloestacionario del púlsar.

Esto permitirá posteriormente simplificaciones razonables en la evaluación de los algoritmos de la estimación temporal basados en los datos experimentales disponibles. [4]

4.2 Modelo de la señal púlsar en banda ancha

A continuación se examina el modelo experimental de la señal púlsar y el modelo teórico de los procesos cicloestacionarios usado para encontrar los datos experimentales.

4.2.1 Modelo Experimental

Las medidas físicas de las señales púlsar han establecido los siguientes rasgos:

- Permite que $x(t)$ sea la señal púlsar recibido sin ruido, con $x(t)$ un proceso estocástico cicloestacionario inducido por la rotación del púlsar. La inversa de esta frecuencia de rotación se denota como el periodo de repetición del pulso (PRP). Frecuencias asociadas con las variaciones periódicas de las estadísticas de la señal son denotadas como ciclofrecuencias. En esta etapa, no se han considerado efectos como 'slown-down' o perturbaciones orbitales en la señal púlsar. Estos efectos serían incorporados en las modificaciones del modelo cicloestacionario de $x(t)$.

PRP será anotado como T . Cada periodo $p_k(t) = x(t + kT)\Pi(t/T)$ ¹⁶ describe un pulso en banda ancha, así que $x(t)$ puede ser expresada como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k(t - kT) \quad \text{Ecuación 4.2}$$

donde cada $p_k(t)$ aleatorio es constituido por subpulsos.

El perfil de potencia media de $p_k(t)$, típicamente conocido como el perfil del púlsar, se define como:

$$\sigma_p^2(t) = E|x(t + kT)|^2 \bullet \Pi(t/T) = E_{(k)}|p_k(t)|^2 \quad \text{Ecuación 4.3}$$

El término $\sigma_p^2(t)$ depende de t pero no del índice de k debido a la cicloestacionariedad natural del proceso. La señal $x(t)$ todavía está definida en banda ancha sin ruido, más que analizada en las correspondientes componentes subbanda.

- Modificaciones del modelo anterior pueden expresarse como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k(t - kT - q(t)) \quad \text{Ecuación 4.4}$$

donde $q(t)$ incorporaría las perturbaciones de cualquier naturaleza, como 'slow-down' y otros efectos que ya se han comentado en el capítulo anterior.

¹⁶ $\Pi(t)$ es el pulso unitario: $\Pi(t)=1$ para $|t|\leq\frac{1}{2}$ y $\Pi(t)=0$ para $|t|>\frac{1}{2}$. [4]

- Debido a la dispersión en el medio interestelar, como se ha visto, la propagación del canal introduce un retardo en cada componente frecuencial definido como:

$$T(f) = T_{\infty} - D(r)f^{-2} \quad \text{Ecuación 4.5}$$

donde $D(r)$ es la constante de dispersión que depende de la distancia r desde el púlsar. El modelo cicloestacionario es todavía válido para cada banda analizada de $x(t)$ después de la propagación. Este efecto motivará más tarde la consideración del modelo de señal púlsar en banda estrecha y el análisis multibanda, donde $T(f)$ puede ser considerada constante dentro de cada subbanda.

4.2.2 Modelo Teórico Genérico

El modelo genérico de banda ancha de la señal púlsar (real) es expresada como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(t) e^{j2\pi k\alpha t} \quad \text{Ecuación 4.6}$$

$$r_{a,k,k'}(t, t+\tau) = r_{a,k,k'}(\tau) = E a_{k'}(t+\tau) a_k^*(t) \quad \text{Ecuación 4.7}$$

donde $\{a_k(t)\}$ es un conjunto de procesos correlados conjuntamente estacionarios¹⁷ y $\alpha=1/T$ la frecuencia cíclica.

¹⁷ La correlación cruzada $R_{xy}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y^*(t_2)]$ mide el nivel de dependencia de dos variables aleatorias resultantes de valorar cada proceso en un instante de tiempo. Dos procesos aleatorios son conjuntamente estacionarios en sentido amplio si cada uno lo es en sentido amplio y cumplen que $R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1 - t_2) = R_{xy}(\tau)$. [26]

Cada $a_k(t)$ puede ser generada como la forma espectral de un proceso blanco $w_k(t)$, donde los miembros de $\{w_k(t)\}$ son además correlados conjuntamente estacionarios:

$$a_k(t) = w_k(t) * h(t) \quad \text{Ecuación 4.8}$$

$$r_{w,k,k'}(t, t + \tau) = r_{w,k,k'}(\tau) = E \ w_k(t + \tau) w_k^*(t) \quad \text{Ecuación 4.9}$$

$$h(t) = \alpha \frac{\sin(\pi \alpha t)}{\pi \alpha t} \quad \text{Ecuación 4.10}$$

$$H(f) = \Pi(f / \alpha) \quad \text{Ecuación 4.11}$$

El filtro espectral $H(f)$ es una función rectangular frecuencial común para todos $w_k(t)$. El perfil del púlsar $\sigma_p^2(t)$ es determinado por el conjunto de funciones correladas $\{r_{w,k,k'}(\tau)\}$. [4]

4.3 Análisis subbanda de $x(t)$

Ahora se derivará la estructura de un receptor sintonizado a una frecuencia central genérica f_c el cual analiza una subbanda dada de una señal $x(t)$ de banda ancha. Como caso particular, se mostrará como $a_k(t)$ puede ser recuperado a partir de $x(t)$. La generación de las componentes en fase y cuadratura desde una frecuencia central de la banda bajo análisis se realiza como:

$$b(t) = (x(t) e^{-j2\pi f_c t}) * g(t) \quad \text{Ecuación 4.12}$$

con $g(t)$ la respuesta impulsional del filtro y $*$ el operador convolución. Así pues:

$$b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) x(t - \tau) e^{-j2\pi f_c (t - \tau)} d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-j2\pi f_c(t-\tau)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(t-\tau) e^{j2\pi k\alpha(t-\tau)} d\tau \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(-f_c+k\alpha)t} \int_{-\infty}^{+\infty} (g(\tau) e^{-j2\pi(-f_c+k\alpha)\tau}) a_k(t-\tau) d\tau \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(-f_c+k\alpha)t} ((g(t) e^{-j2\pi(-f_c+k\alpha)t}) * a_k(t))
\end{aligned} \tag{Ecuación 4.13}$$

Ahora, asignando $a_k(t) = w_k(t) * h(t)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
b(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(t) e^{j2\pi(-f_c+k\alpha)t} \\
b_k(t) &= (g(t) e^{-j2\pi(-f_c+k\alpha)t}) * a_k(t) \\
&= ((g(t) e^{-j2\pi(-f_c+k\alpha)t}) * h(t)) * w_k(t) \\
&= h'(t) * w_k(t)
\end{aligned} \tag{Ecuación 4.14}$$

El cual es estacionario, donde el filtro $h'(t)$ tiene como respuesta frecuencial $H'(f)$:

$$H'(f) = G(f - f_c + k\alpha) H(f) \tag{Ecuación 4.15}$$

La Ecuación 4.13 expresa que, en general, $b(t)$ tiene componentes frecuenciales a $-f_c + k\alpha$. Estas expresiones proveen la estructura de la señal en banda base observada por un receptor sintonizado a una frecuencia central f_c .

Como caso particular, para mostrar como los componentes $a_k(t)$ pueden ser recuperados asignamos $f_c = k_c \alpha = k_c / T$ y $g(t) = h(t)$, se obtiene:

$$H'(f) = \Pi^2(Tf) \delta_{k, k_c} \quad \text{Ecuación 4.16}$$

en términos del delta de Kronecker¹⁸, lo que significa que solo una versión filtrada de las componentes de interés son recuperadas cuando $k = k_c$,

$$b(t) = b_{k_c}(t) = h(t) * a_{k_c}(t) \quad \text{Ecuación 4.17}$$

Pero como $\Pi^2(Tf) = \Pi(Tf)$, se tiene que $h(t) * h(t) = h(t)$. Así pues:

$$b(t) = b_{k_c}(t) = h(t) * h(t) * w_{k_c}(t) = h(t) * w_{k_c}(t) = a_{k_c}(t) \quad \text{Ecuación 4.18}$$

4.3.1 Muestreo

La señal analógica $b(t)$ dentro del análisis en banda es muestreado a la frecuencia de muestreo $f_s = 1/T_s$ para obtener la señal discreta y cuantificada $b[n]$:

$$b[n] = b(nT_s) \quad \text{Ecuación 4.19}$$

¹⁸ $\delta_{k_1, k_2} = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1 = k_2 \\ 0 & \text{si } k_1 \neq k_2 \end{cases}$ es decir, $\delta_{k_1, k_2} = \delta_{k_1 - k_2}$ [20]

El sobremuestreado es realizado para evitar el aliasing¹⁹: $f_s \geq 2B$ (criterio de Nyquist), con B el ancho de banda de $b(t)$. El procedimiento de muestreo descrito aquí corresponde al muestreo IQ, que es suficiente para los análisis de fiabilidad. El muestreo IF sería usado en una implementación real, como ya se ha comentado.

4.4 Modelo de la matriz de correlación: señal púlsar

Los algoritmos de sincronización para la estimación de la fase de la señal púlsar $x(t)$, como se mostrará, requieren un modelo de matriz de correlación del púlsar a diferentes muestras de $x(t)$. Primero veremos un modelo genérico para la matriz de correlación de un vector $x(t)$ de un proceso analógico cicloestacionario, usado para obtener la matriz correlación del proceso cicloestacionario discreto (muestreado) $x[n]=x(nT_s)$, con T_s periodo de muestreo.

Se considerará el caso en que la frecuencia de muestreo sea múltiplo del periodo del púlsar T , y el caso donde debido a la velocidad de la nave espacial, la frecuencia de muestreo no sea múltiplo del periodo del púlsar.

¹⁹ A la frecuencia mínima de muestreo $f_s=2B$ se le conoce como frecuencia de Nyquist. El sobremuestreado se produce cuando se utiliza una frecuencia de muestreo superior a la frecuencia de Nyquist. Por el contrario cuando el criterio de Nyquist no es satisfecho (bien porque la señal no está limitada en banda o la frecuencia de muestreo no ha sido seleccionada correctamente) las distintas frecuencias alias se solapan, lo que da lugar a la distorsión conocida bajo la denominación inglesa de Aliasing. [26]

4.4.1 Desarrollo analógico en serie de Fourier de la matriz correlación

En esta sección se deduce un modelo de Fourier para la matriz correlación de un proceso vectorial cicloestacionario. De acuerdo con los apartados anteriores, un proceso vectorial cicloestacionario $x(t)$ de frecuencia de repetición α puede ser expresado a partir de un conjunto de procesos vectoriales estacionarios $a_k(t)$ como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(t) e^{j2\pi k \alpha t} \quad \text{Ecuación 4.20}$$

$$R_{a,k,k',t,t+\tau} = R_{a,k,k',\tau} = E \ a_{k'}(t+\tau) a_k^H(t) \quad \text{Ecuación 4.21}$$

donde $R_{a,k,k',\tau}$ son las matrices correlación correspondientes.

La matriz correlación del proceso se construye como:

$$\begin{aligned} R_x(t) &= E \ x(t) x^H(t) = E \left\{ \sum_{k,k'} a_{k'}(t) a_k^H(t) e^{j2\pi(k'-k)\alpha t} \right\} \\ &= \sum_{k,k'} R_{a,k,k',0} e^{j2\pi(k'-k)\alpha t} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi l \alpha t} \sum_{k'-k=l} R_{a,k,k',0} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_{a_l} e^{j2\pi l \alpha t} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 4.22}$$

$$R_{a_l} = \sum_{k'-k=l} R_{a,k,k',0} \quad \text{Ecuación 4.23}$$

En la Ecuación 4.22 las matrices R_{a_l} son precisamente los coeficientes de Fourier²⁰ del desarrollo de $R_x(t)$ a la frecuencia de repetición $l\alpha=l/T$,

$$R_{a_l} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_x(t) e^{-j2\pi l\alpha t} dt = \frac{1}{T} F[R_x(t)]_{f=l/T} \quad \text{Ecuación 4.24}$$

donde $F[.]$ denota la transformada de Fourier de la matriz correspondiente.

²⁰ La serie de Fourier de una señal analógica periódica con frecuencia w_0 se define como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk w_0 t} \quad \text{donde} \quad a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-jk w_0 t} dt \quad \text{son los coeficientes de la serie. De forma}$$

análoga la serie de Fourier de una señal discreta periódica con periodo de repetición N se

$$\text{define como: } x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{donde} \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{son los coeficientes de la}$$

serie. Para que la serie converja a la función original se ha de cumplir una serie de condiciones.

Una condición es la integrabilidad cuadrática:

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

Una función periódica puede ser expresada como serie de Fourier si la energía contenida en un periodo es finita. Para algunas funciones esta condición es más restrictiva que necesaria. [27]

4.4.2 Desarrollo discreto en serie de Fourier de la matriz correlación

Cuando la señal analógica compleja en banda base $x(t)$ es muestreada a la frecuencia de muestreo $f_s=1/T_s$, con T_s el periodo de muestreo, se puede definir un proceso vectorial $x[n]$ almacenando N muestras consecutivas de $x(t)$ como:

$$x(t) = [x(t), x(t - T_s), \dots, x(t - (N - 1)T_s)]^T$$

$$x[n] = x(nT_s) \quad \text{Ecuación 4.25}$$

Asignando $\alpha = 1/T = 1/N_T T_s$, donde N_T es el número de muestras por periodo (la longitud N de $x[n]$ no corresponde necesariamente con un número entero de periodos), se obtiene el desarrollo en serie de Fourier discreto:

$$R_x[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_{a_l} e^{j2\pi l \frac{nT_s}{T}} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_{a_l} e^{j2\pi \frac{n}{N_T} l} \quad \text{Ecuación 4.26}$$

Asignando $l = l_1 N_T + l_2$, con $-\infty < l_1 < +\infty$ y $0 \leq l_2 \leq N_T - 1$, se obtiene:

$$\begin{aligned} R_x[n] &= \sum_{l_2=0}^{N_T-1} \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} R_{a_{l_1 N_T + l_2}} e^{j2\pi \frac{n}{N_T} (l_1 N_T + l_2)} \\ &= \sum_{l_2=0}^{N_T-1} \left(\sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} R_{a_{l_1 N_T + l_2}} \right) e^{j2\pi \frac{n}{N_T} l_2} = \sum_{l_2=0}^{N_T-1} R_a[l_2] e^{j2\pi \frac{n}{N_T} l_2} \end{aligned}$$

$$\quad \text{Ecuación 4.27}$$

$$R_a[l_2] = \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} R_{a_{l_1 N_T + l_2}} \quad \text{Ecuación 4.28}$$

Por tanto, una vez el proceso ha sido muestreado, solo un número finito de términos es requerido para expresar $R_x[n]$. Las matrices $R_a[l_2]$ pueden ser obtenidas a partir de $R_x[n]$ usando la transformada discreta de Fourier:

$$R_a[l_2] = \frac{1}{N_T} \sum_{n=0}^{N_T-1} R_x[n] e^{-j2\pi \frac{l_2}{N_T} n} \quad \text{Ecuación 4.29}$$

la cual es aplicada respecto a las componentes en la matriz de elementos.

4.4.3 Estructura detallada de la matriz correlación discreta

La estructura detallada de la matriz correlación para la señal en banda ancha no puede ser completamente determinada a partir de los datos experimentales disponibles. Tradicionalmente, las medidas radioastronómicas han provisto únicamente información sobre el perfil medio de potencia de la señal pulsar y sobre su tasa de densidad de potencia espectral media. Estas medidas, las cuales han sido realizadas a través de análisis subbanda de la señal pulsar, son medidas basadas en la envolvente. La envolvente de una señal pasabanda de un ancho de banda dado, $e(t)$, es definido como el módulo de la señal en banda base equivalente: $e^2(t) = x_i^2(t) + x_q^2(t) = |b_x(t)|^2$, en términos de las componentes en fase y cuadratura $x_i(t)$ y $x_q(t)$.

Como ya se ha visto, la completa caracterización de la matriz de correlación requiere de la evaluación de las esperanzas del tipo $E b_x(t+\tau)b_x^*(t)$, la cual no es asequible. La aproximación realizada para la estimación temporal consiste en modelar las matrices correlación como matrices diagonales. Esto es razonable si el ancho de banda examinado es suficientemente estrecho para garantizar que la densidad espectral de potencia es constante aproximadamente.

Variaciones en la densidad espectral de potencia dentro de la banda de interés siempre aparecen como términos fuera de la diagonal en la matriz correlación del proceso. Bajo estas condiciones, la matriz correlación $R_x[n]$ y sus matrices de coeficientes espectrales $R_a[l_2]$ en la Ecuación 4.27 pasan a ser diagonales cuando consideramos un subcanal de banda estrecha de la señal púlsar. En particular, los coeficientes diagonales de $R_x[n]$ corresponden a muestras correlativas del perfil de potencia media $\sigma_p^2(t)$.

4.4.4 Conclusiones

Aparentemente, parece que los datos experimentales no son suficientes para establecer el modelo cicloestacionario de banda ancha de la señal púlsar. Por tanto, se intentará estimar los algoritmos de sincronización en el imperfecto conocimiento del modelo de señal. A pesar de esto, para procesos multibanda, la variación espectral del púlsar puede ser considerado negligible dentro de cada subbanda, así que la matriz correlación subbanda es aproximadamente diagonal. Este hecho será utilizado en la estimación de los algoritmos temporales. [4]

4.5 Modelo de la matriz de correlación del ruido

4.5.1 Ruido del sistema

La matriz correlación del ruido del sistema gaussiano puede ser deducida de la temperatura del sistema, provisto en capítulos anteriores. Una tendencia no uniforme en frecuencia es expresada como términos diagonales en la matriz correlación del ruido.

Si se considera la frecuencia central 1GHz y el ancho de banda 200MHz, es razonable asumir que el ruido del sistema es blanco (por tanto, su matriz de correlación es diagonal). Esto permitirá simplificar los algoritmos de estimación temporal.

4.5.2 Radiación proveniente del Sol y de Júpiter

El Sol y Júpiter constituyen fuentes fuertes de interferencias en RF, como ya se ha comentado, las cuales degradan la recepción en antenas con lóbulos secundarios. El nivel de interferencia depende de la localización dentro del sistema solar. Así que en la proximidad de las fuentes, se espera que el receptor entre en una región 'ciega' en términos de posicionamiento.

Este tipo de interferencias necesita antenas multihaz, capaces de cancelar lóbulos secundarios adaptativos. Este estudio proveerá únicamente la degradación de la SNR esperada debido a estas fuentes en términos de distancia. Un margen razonable en dB será considerado para tener en cuenta las interferencias residuales del Sol y de Júpiter después de la cancelación, así que el ruido global del sistema es todavía considerado blanco para la banda de interés. [4]

5 ESTIMACIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

5.1 El principio de Máxima Verosimilitud

El principio de máxima verosimilitud es una de las piedras angulares en la historia de la estadística. En la estadística moderna se ha convertido en una idea sencilla, para algunos incluso evidente, ya que afirma, a grandes rasgos, que entre todas las explicaciones posibles para los datos, hay que escoger como la mejor aquella que hace a los datos observados los más probables. Aunque el principio no es verdaderamente tan simple.

Muchos procedimientos estadísticos suponen que los datos siguen algún tipo de modelo matemático que se define mediante una ecuación, en la que se desconoce alguno de sus parámetros, siendo éstos calculados o estimados a partir de la información obtenida en un estudio bien diseñado para tal fin. Existen diferentes procedimientos para estimar los parámetros de una distribución de probabilidad. De entre esos procedimientos probablemente el más versátil, ya que se puede aplicar en gran cantidad de situaciones, y por ello uno de los más empleados es el conocido con el nombre de Método de Máxima Verosimilitud (en inglés Method of Maximum Likelihood).

El algoritmo que utilizaremos para estimar la fase de las radio emisiones de los púlsares se basa en este procedimiento. A continuación se muestra en que consiste y que características posee. [30]

5.2 El método de Máxima Verosimilitud

El método de Máxima Verosimilitud es una de las técnicas para obtener un estimador de un parámetro dada una muestra finita de datos. Tal como su nombre indica, el estimador será el valor del parámetro que maximiza la función de verosimilitud.

Las propiedades deseables para un estimador son: consistencia, carencia de sesgo, eficiencia y suficiencia. Este método tiene muchas de estas propiedades, como se verá a continuación.

5.2.1 Función de Verosimilitud

Supóngase que X es una variable aleatoria²¹ con función de densidad de probabilidad $f(x,\theta)$ ²², donde θ es un parámetro desconocido (o vector de parámetros). Sean x_1, \dots, x_n los valores observados en una muestra aleatoria de tamaño n ²³.

²¹ Una variable aleatoria es una función que asigna a cada resultado de un experimento aleatorio cierto número. Si tenemos un experimento aleatorio que tiene como espacio muestral $\Omega=\{a_1, a_2, \dots\}$, una v.a. es una función que:

$$\begin{aligned} X: W &\rightarrow R \\ a_i &\rightarrow X(a_i) \end{aligned}$$

²² Dada una v.a. X se define su Función de Distribución como: $F_x(x)=P\{X \leq x\}$ definida para cualquier número $x \in R$. Es decir dado un número concreto 'x', $F_x(x)$ es igual a la probabilidad del suceso $\{X \leq x\}$ consistente en todos los resultados a_i tales que $X(a_i) \leq x$. Se define la Función de Densidad como la derivada de la Función de Distribución de la v.a. :

$$f(x) = \frac{\delta F(x)}{\delta x}$$

²³ Un conjunto de n observaciones independientes de X se llama una muestra de tamaño n .

Tendremos que su distribución de probabilidad conjunta es:

$$f_c(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta) \quad \text{Ecuación 5.1}$$

Esta función que depende de $n+1$ cantidades podemos considerarla de dos maneras:

- Fijando θ , es una función de las n cantidades x_i . Esto es la función de probabilidad o densidad.
- Fijados los x_i como consecuencia de los resultados de elegir una muestra mediante un experimento aleatorio, es únicamente función de θ . A esta función de θ la denominamos Función de Verosimilitud. Por tanto la función de verosimilitud de la muestra puede obtenerse como:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta) \quad \text{Ecuación 5.2}$$

En este punto podemos plantearnos el que dado una muestra sobre la que se ha observado los valores x_i , una posible estimación del parámetro es aquella que maximiza la función de verosimilitud. Si la pdf y el (los) parámetro(s) describen realmente los datos, esperamos alta probabilidad para los datos que hemos medido. De forma similar un parámetro cuyo valor se desvíe mucho del auténtico resultará en baja probabilidad para las medidas observadas.

El método de máxima verosimilitud puede emplearse en situaciones donde existen varios parámetros desconocidos que es necesario estimar (por ejemplo $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$). En tales casos, la función de verosimilitud es una función de los k parámetros desconocidos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, y los estimadores de máxima verosimilitud $\{\hat{\theta}_i\}$ se obtienen al igualar a cero las k derivadas parciales $\delta L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) / \delta \theta_i$ $i=1, 2, \dots, k$ y resolver el sistema de ecuaciones resultante.

Análogamente podemos definir la Función de Verosimilitud para N variables independientes e idénticamente distribuidas X_1, X_2, \dots, X_n como la función de densidad de probabilidad conjunta, esto es:

$$L(\underline{x}, \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^N f(x_i, \underline{\theta}) \quad \text{Ecuación 5.3}$$

donde $\underline{\theta}$ denota el conjunto de parámetros y $f(\cdot)$ es la función de densidad de probabilidad.

En muchos de los casos se trabaja con el logaritmo de la verosimilitud (log-likelihood) dada su forma de manejo más fácil en el procedimiento computacional. El logaritmo de la verosimilitud estará definido como:

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^N \log f(x_i, \theta) \quad \text{Ecuación 5.4}$$

salvo una constante. [31][32][33][34]

5.2.2 Estimadores de máxima verosimilitud

Como se ha visto la función de verosimilitud se obtiene a partir de la función de densidad, intercambiando los papeles entre parámetro y estimador.

En una función de verosimilitud consideramos que las observaciones x_1, \dots, x_n , están fijadas, y se representa la gráfica con el valor de los valores que tomaría la función de densidad para todos los posibles valores del parámetro θ .

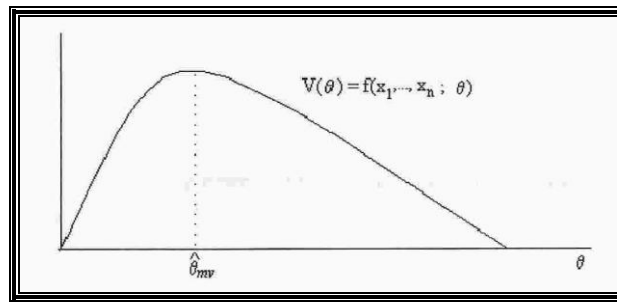


Ilustración 5.1: Estimador máximo verosímil [32]

El estimador máximo verosímil del parámetro buscado, $\hat{\theta}_{MV}$, es aquel que maximiza su función de verosimilitud, $L(\theta)$.

Por tanto se definen los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros como aquellos que maximizan la función de verosimilitud:

$$\frac{dL}{d\theta_i} = 0, i=1,2,\dots,m \quad \text{Ecuación 5.5}$$

La definición no garantiza que los estimadores MV sean “óptimos”. En general, sin embargo, suelen ser la aproximación más aceptable al problema de estimar parámetros.

Como es lo mismo maximizar una función que su logaritmo (al ser este una función estrictamente creciente), este máximo puede calcularse derivando con respecto a la función de verosimilitud (o bien su logaritmo) y tomando como estimador máximo verosímil al que haga la derivada nula:

$$\frac{\delta \log L(\hat{\theta}_{MV})}{\delta \theta} = 0 \quad \text{Ecuación 5.6}$$

De modo más preciso, se define el estimador máximo verosímil como la v.a. :

$$\hat{\theta}_{MV} = \max_{\theta \in \mathbb{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \quad \text{Ecuación 5.7}$$

Los estimadores de máxima verosimilitud tienen ciertas propiedades en general que a continuación se enuncian.

5.2.2.1 Consistencia

Son consistentes con el parámetro a estimar ya que convergen al valor auténtico del parámetro en el límite asintótico, es decir, cumplen que:

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P[|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon] = 0 \quad \text{Ecuación 5.8}$$

Es decir, que cuando el tamaño de la muestra crece arbitrariamente, el valor estimado se aproxima al parámetro desconocido. Hay un teorema que dice que si se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}] = \theta$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{\theta}] = 0$, entonces $\hat{\theta}$ es consistente.

5.2.2.2 Invariancia

Una propiedad útil de los EMV es la de la invariancia que dice que si g es una función biunívoca con inversa g^{-1} , de manera que $\phi = g(\theta)$ implica que $\theta = g^{-1}(\phi)$ entonces el estimador máximo verosímil de $\phi, \hat{\phi}_{MV}$, se calcula como $\hat{\phi}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV})$.

De forma análoga si $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$, son los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, entonces el estimador de máxima verosimilitud de cualquier función $h(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ de estos parámetros, es la misma función $h(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k)$ de los estimadores $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$.

5.2.2.3 Suficiencia

Si $\hat{\theta}$ es un estimador suficiente de θ , su estimador máximo verosímil, $\hat{\theta}_{MV}$ es función de la muestra a través de $\hat{\theta}$. Diremos que $\hat{\theta}$ es un estimador suficiente del parámetro θ si $P[X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_n = x_n |_{\hat{\theta}=a}]$ no depende de θ para $\forall \theta$. Es decir, si agota toda la información existente en la muestra que sirve para estimar el parámetro.

5.2.2.4 Asintóticamente normales

Bajo condiciones de regularidad, los EMV son asintóticamente normales, de manera que:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N(0, i^{-1}(\theta)) \quad \text{Ecuación 5.9}$$

Es decir, que cuando el número de muestras aumenta asintóticamente el error tiene una distribución gaussiana.

5.2.2.5 Asintóticamente eficientes²⁴

Entre todos los estimadores consistentes de un parámetro, los de máxima verosimilitud son los de varianza mínima. Es decir, será el estimador eficiente si existe y en el caso de que no exista se aproximará al óptimo asintóticamente cuando el número de muestras aumente.

²⁴ Dados dos estimadores $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ de un mismo parámetro θ , diremos que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$ si $\text{Var}[\hat{\theta}_1] < \text{Var}[\hat{\theta}_2]$, es decir, su dispersión respecto al valor central (varianza) es más pequeña.

5.2.2.6 Insesgado

Un estimador debe estar “próximo” en algún sentido al valor verdadero del parámetro desconocido. De manera formal, se dice que $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ , si el valor esperado de $\hat{\theta}$ es igual a θ . Esto equivale a afirmar que la media de la distribución de probabilidad de $\hat{\theta}$ es igual a θ :

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

Los estimadores de máxima verosimilitud no son necesariamente insesgados sin embargo son insesgados para n grande.

Esto implica que el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ es, de manera aproximada, el estimador insesgado de varianza mínima de θ , para n grande ($n \rightarrow \infty$)²⁵. El estimador es de mínima varianza cuando todos los otros estimadores insesgados $\hat{\theta}'$ cumplen que $E |\hat{\theta}' - \theta|^2 \geq E |\hat{\theta}_{MV} - \theta|^2$. [32][33][34]

²⁵ No hay un único estimador insesgado. Uno de los métodos para seleccionar uno de entre varios estimadores insesgados es escoger el de menor varianza.

6 APLICACIÓN DE MLE

6.1 Introducción

En este capítulo analizaremos los algoritmos de sincronización y sus límites de realización teóricos asociados a los radio pulsares. Estos algoritmos tratan de estimar la fase o TOA (Time of Arrival) bajo régimen de baja relación señal a ruido (baja SNR). Este régimen se asume como consecuencia de la hipótesis de la utilización en recepción de una antena de tamaño reducido: aumentando el tamaño de la antena se podría incrementar la relación señal a ruido en recepción pero no sería factible ya que se supone estamos situados en una pequeña o mediana nave espacial.

En este régimen de baja SNR, el comportamiento de los algoritmos es controlado únicamente por las estadísticas de segundo orden (matriz de correlación) de la señal pulsar, la cual puede ser parcialmente deducida de los resultados experimentales como se ha mostrado en el cuarto capítulo. Así pues, el perfil medio de potencia dentro del periodo del pulsar es usado como la única información disponible de la señal de interés.

El ruido aparece como el factor dominante de degradación de las estimaciones temporales, debido al tamaño reducido de la antena, es por tanto necesario un ancho de banda amplio y un tiempo de observación largo (en periodos de pulsar) para recuperar la información temporal útil.

El conocimiento de la microestructura de los pulsos individuales de los pulsares, de los cuales la media constituye el perfil de potencia, no es necesario en el régimen de baja SNR, ya que está relacionado con las estadísticas de orden superior a dos. Únicamente para antenas grandes la microestructura constituye un factor importante en la evaluación del error en tiempo, el cual se añade al efecto del ruido aditivo (menos importante en las antenas grandes).

Las ecuaciones aquí tratadas no son por tanto aplicables a antenas de tamaño grande. Más bien, somos optimistas al no considerar el jitter temporal de los pulsos individuales de los púlsares, irrelevante en el régimen de baja SNR. En general, se ha encontrado que los algoritmos y los límites de las realizaciones para régimen de alta SNR son matemáticamente más complejos de analizar. [4]

6.2 Estimación del tiempo de llegada (TOA)

En esta sección aplicaremos el criterio de Máxima Verosimilitud (ML) para estimar el TOA del púlsar. De acuerdo con el capítulo cuarto, asumimos que el modelo del púlsar es una señal cicloestacionaria inmersa en ruido gaussiano. En una primera aproximación simplificada, tenemos en cuenta las siguientes consideraciones:

- Ambas polarizaciones de la señal púlsar son muestreadas en un ancho de banda dado a un número entero de muestras por periodo. El procesado de ambas polarizaciones es necesario debido a la polarización de los púlsares.
- Se considera que el periodo de repetición del púlsar (PRP) es conocido.
- Las estadísticas de segundo orden, o el perfil de potencia media, de la señal púlsar muestreada se asume también como conocida. El conocimiento parcial provoca una degradación en el funcionamiento, añadida a la pérdida prevista debido al uso de antenas pequeñas y al ruido aditivo.
- La relación señal a ruido en potencia es muy baja (debido a la suposición de antena de dimensiones reducidas). Como posteriormente se mostrará, esto sólo requiere del conocimiento de las estadísticas de segundo orden de la señal de interés.

- Sólo será presente una señal púlsar. Se considera que otros púlsares son equivalentes al ruido ya que la media de sincronismo se realiza para el púlsar de interés.
- Se asume el régimen de adquisición (no el conocimiento prior de los parámetros). Es decir, que únicamente se tiene en cuenta el régimen de la estimación del TOA, asumiendo el conocimiento previo de los parámetros necesarios para ello.

Se asume además que toda muestra es almacenada en un vector x , opcionalmente usando la mitad superior e inferior para cada polarización, y cada mitad incluyendo todos los periodos de la señal púlsar en un tiempo dado. Así pues, la señal modelo se puede expresar como:

$$x = p + n \quad \text{Ecuación 6.1}$$

donde p es el vector de la señal púlsar y n es el vector del ruido. Por lo tanto la matriz de correlación de la señal se podrá expresar como:

$$R_x = E \ x x^H$$

$$R_p(\tau) = E \ p p^H$$

$$R_n = E \ n n^H$$

$$R_x(\tau) = R_p(\tau) + R_n \quad \text{Ecuación 6.2}$$

Donde $R_p(\tau)$ es la matriz de autocorrelación cíclica²⁶ de la señal púlsar y R_n la matriz de autocorrelación estacionaria del vector ruido.

²⁶ Es cíclica debido a que se considera que es una señal cicloestacionaria y que por lo tanto su autocorrelación es cíclica, como ya se ha visto.

El vector de datos x puede contener:

- Una o ambas polarizaciones. En el último caso, $x^T = [x_1^T, x_2^T]^T$, donde el vector x_i contiene las muestras de una de las polarizaciones.
- Una señal, con un cierto ancho de banda, muestreada a una frecuencia de muestreo alta, o subvectores correspondientes a diversas sub-bandas de la señal púlsar. En el primer caso, se debería tener en cuenta que el modelo del púlsar ha experimentado una dispersión interestelar y es más ancho que cuando se observa en bandas más pequeñas. En el último caso, $x^T = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_{N_c}^T]^T$, donde el vector x_i contiene muestras de uno de los N_c canales no solapados.

En la primera parte de este capítulo, asumimos que se procesa un canal de suficiente ancho de banda (en términos de variaciones de densidad espectral de potencia y dispersión interestelar negligible). Más tarde se considerará la extensión de anchos de banda mayores con dispersión interestelar no negligible. [4]

6.2.1 Establecimiento de los límites de funcionamiento

Como se ha visto en el quinto capítulo el criterio ML aproxima asintóticamente (para grandes cantidades de datos) el comportamiento de un estimador insesgado de mínima varianza de un vector de parámetros.

Un límite a la varianza de las estimaciones ML es el Crámer-Rao Lower Bound (CRLB). Para una longitud de datos recogidos fija, y cuando la relación señal a ruido (SNR) decrece, la varianza de las estimaciones se aparta del comportamiento predicho por el CRLB (efecto umbral).

Existen límites más estrechos para la región de baja SNR, pero son computacionalmente caros y difíciles de deducir. Siempre que la longitud de los datos recogidos sea suficientemente larga, el CRLB será una medida próxima al comportamiento real, y las estimaciones de parámetros serán distribuidas gaussianamente con la matriz correlación igual al CRLB. Es de gran interés constituir un criterio para establecer cual es el L o SNR umbral, dada una longitud de datos L o SNR, que delimite si el CRLB es justo o no. Por eso será tratado más adelante. [4]

6.2.2 Caracterización estadística de la señal púlsar

Para la formulación del criterio ML se requiere de la caracterización estadística exacta de la señal púlsar. Para esta cuestión, hay dos posibilidades:

- La señal púlsar es Gausiana con estadísticas cíclicas. Esto parece razonable pero nuestro conocimiento teórico no ha sido verificado experimentalmente. En este caso, la función de verosimilitud de los datos es expresada como:

$$\rho(x | \tau) = \frac{1}{\pi^L \det(R_n + R_p(\tau))} e^{-x^H (R_n + R_p(\tau))^{-1} x} \quad \text{Ecuación 6.3}$$

- La señal púlsar es no Gausiana con estadísticas cíclicas. En este caso, se aplicará una aproximación más robusta: la aproximación ML para baja SNR.

A continuación se mostrará que se obtienen resultados similares en términos de covarianza de estimaciones temporales para ambos casos, así que la suposición Gausiana para la señal púlsar no es crítica para baja SNR.

Así pues, cuando ha sido más conveniente, hemos utilizado la suposición Gausiana para la deducción de algunos resultados. [4]

6.2.3 Caso gaussiano cíclico

La estimación ML $\hat{\tau}$ se consigue maximizando la función de densidad de probabilidad de la señal condicionada a los parámetros desconocidos τ y evaluados para el vector de datos actual x . La estimación ML para el caso Gausiano puede ser obtenido con la siguiente maximización:

$$\hat{\tau} = \operatorname{argmax}_{\tau} \ln \rho(x | \tau) = \operatorname{argmin}_{\tau} \ln \det(R_n + R_p(\tau)) + x^H (R_n + R_p(\tau))^{-1} x \quad \text{Ecuación 6.4}$$

En la ecuación anterior, podemos distinguir dos casos:

- La estimación ML real: el vector de datos x es fijo y se busca un valor de τ para minimizar la expresión anterior.
- La estimación ML continua: el modelo variable τ es fijado y el vector de datos x cambia con el tiempo de acuerdo con el retardo variable τ' . En este caso, únicamente el segundo término es necesario.

Solo las estimaciones ML reales son analizadas en este documento, para las cuales aplicamos el límite de Cramer-Rao. Notar que en la ecuación previa el primer término es específico de la estadística Gausiana e independiente de τ , mientras que el segundo término puede ser considerado por si mismo un estimador ML de τ como:

$$\hat{\tau} = \operatorname{argmin}_{\tau} Z(x | \tau) = x^H (R_n + R_p(\tau))^{-1} x \quad \text{Ecuación 6.5}$$

No hemos considerado la estimación en potencia. Si este fuera el caso, el primer término sería incorporado en la formulación ML. [4]

6.2.3.1 Límite inferior Cramér-Rao

La expresión general para el límite inferior de Cramer-Rao en el rango de baja SNR, donde τ_s se refiere a la unidad de tiempo en muestras es:

$$\begin{aligned} CRLB(\tau_s) &= \frac{1}{E_x \left| \nabla_{\tau_s} \ln \rho(x | \tau_s) \right|^2} = \frac{-1}{E_x \nabla_{\tau_s}^2 \ln \rho(x | \tau_s)} \\ &= \frac{1}{\text{tr} \left(R_x^{-1}(\tau_s) \nabla_{\tau_s} R_p \nabla_{\tau_s}^T \right)} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 6.6}$$

donde se ha utilizado el operador traza²⁷. Se entiende que la expresión anterior es evaluada con los parámetros reales.

En este caso asumiremos que la matriz correlación de los datos es perfectamente conocida exceptuando el retardo real τ'_s . De otro modo, la potencia del ruido y la del pulsar deberían ser además incorporadas en el procedimiento de la estimación. Esto puede ser de interés en procedimientos más refinados donde la señal pulsar es sujeta a variaciones más lentas de potencia.

²⁷ Se utiliza la siguiente propiedad: $a^T B c = \text{tr}(B c a^T)$, donde a y c son vectores y B una matriz. [4]

Para un canal suficientemente estrecho, la matriz correlación de la señal púlsar, $R_p(\tau_s)$, se puede asumir como diagonal, donde los elementos diagonales son versiones muestreadas retardadas del modelo de potencia media con $\delta(\cdot)$ delta de Kronecker :

$$\left[R_p(\tau_s) \right]_{k,k'} = \sigma_p^2 \delta(k-k') \quad \text{Ecuación 6.7}$$

Para derivar una expresión más específica para el CRLB, introduciremos el modelo cíclico de la matriz correlación para los cálculos,

$$R_p(\tau_s) = \sum_{k=0}^{N_T-1} R_A[k] e^{j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s} \quad \text{Ecuación 6.8}$$

Dónde los coeficientes de Fourier de la matriz son $R_A[k] = S[k]D^k$, con D como matriz diagonal de componentes $[D]_{i,i} = e^{-j2\pi i/N_T}$ correspondiendo al dominio frecuencial equivalente de retardar cada elemento de la diagonal de $R_p(\tau_s)$, y $S[k]$ los coeficientes de la transformada discreta de Fourier del modelo de potencia muestreado $\sigma_p^2(t)$

Un cálculo aproximado del CRLB para la región de baja SNR y caso ruido blanco $R_n = \sigma_n^2 I$ da como resultado:

$$CRLB(\tau_s) \simeq \frac{1}{4\pi^2 T_0 B} \left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{p,T}^2} \right) \gamma_p^2 \quad \text{Ecuación 6.9}$$

$$\gamma_p^2 = \frac{\sigma_{p,T}^4}{\frac{1}{N_T^2} \sum_k |S[k]|^2 k^2} = \frac{1}{\sum_k \left| \frac{S[k]}{S[0]} \right|^2 \frac{k^2}{N_T^2}} \quad \text{Ecuación 6.10}$$

donde γ_p es un factor que depende de la forma del pulso del púlsar, independiente de su potencia, y $\sigma_{p,T}^2$ la potencia media sobre el periodo del púlsar. La notación \sum_k es sobre el intervalo $-\frac{1}{2}N_T \leq k < \frac{1}{2}N_T$ y $S[k]S[-k] = |S[k]|^2$. El número de muestras L puede ser expresado a partir del tiempo de observación T_0 y el ancho de banda B como $L = T_0 B$. Se han utilizado las propiedades,

$$S[0] = \sigma_{p,T}^2 = \frac{1}{N_T} \sum_k \sigma_p^2[k] \quad \sigma_p^2[k] = [R_p[k]]_{1,1} \quad \text{Ecuación 6.11}$$

La utilidad de la Ecuación 6.10 será aclarada más tarde cuando establezcamos la equivalencia con el CRLB en la región de baja SNR para un púlsar no gaussiano estadísticamente. [4]

6.2.4 Caso cíclico no gaussiano

En el caso no Gaussiano, deduciremos un estimador independiente de la estadística de la señal. Se mostrará que para SNR bajas, los resultados son equivalentes a asumir que estadísticamente el púlsar es gaussiano, requiriendo momentos estadísticos sólo hasta segundo orden.

La función de verosimilitud de los datos x condicionado a la señal púlsar y a la fase desconocida puede ser expresada como:

$$\rho(x|\tau, p) = \frac{1}{\pi^L \det R_n} e^{-(x-p)^H R_n^{-1} (x-p)} \quad \text{Ecuación 6.12}$$

En nuestro caso, la señal púlsar es desconocida pero no su estadística. Así pues, la función probabilidad es expresada como:

$$\rho(x|\tau) = E_p \rho(x|\tau, p) = \frac{1}{\pi^L \det R_n} E_p e^{-(x-p)^H R_n^{-1} (x-p)} \quad \text{Ecuación 6.13}$$

en términos de E_p , (la esperanza con respecto a la señal púlsar). Ahora, la hipótesis de baja SNR se aplica al segundo orden,

$$p(x|\tau) \simeq \frac{1}{\pi^L \det R_n} E_p (f(x) - \nabla_x f(x) \cdot p - p^H \nabla_{x^H} f(x) + p^H \nabla_{x^H} \nabla_x f(x) \cdot p) \quad \text{Ecuación 6.14}$$

$$f(x) = e^{-x^H R_n^{-1} x}$$

$$\nabla_x f(x) = -e^{-x^H R_n^{-1} x} \cdot x^H R_n^{-1}$$

$$\nabla_{x^H} \nabla_x f(x) = e^{-x^H R_n^{-1} x} \cdot (R_n^{-1} x x^H R_n^{-1} - R_n^{-1}) \quad \text{Ecuación 6.15}$$

Así pues,

$$p_2(x|\tau) = \frac{1}{\pi^L \det R_n} e^{-x^H R_n^{-1} x} \cdot M(x|\tau) \simeq p(x|\tau)$$

$$M(x|\tau) = 1 - \text{tr}(R_n^{-1} R_p(\tau)) + x^H R_n^{-1} R_p(\tau) R_n^{-1} x \quad \text{Ecuación 6.16}$$

Siendo $E_p p = 0$. Si los otros parámetros son conocidos, $M(x|\tau)$ tiene que ser maximizado. Notar que el termino $(R_n^{-1} R_p(\tau))$ no depende de τ para un modelo cíclico de $R_p(\tau)$ (asumiendo $R_p(\tau)$ diagonal y ruido blanco).

Para probar esto, consideramos $L \times L$ -matrices, con $L = N_T N_I$.

$$R_p(\tau) = \sum_{k=0}^{N_T-1} R_A(k) e^{j2\pi \frac{k}{N_T} \tau} \quad \text{Ecuación 6.17}$$

Donde los coeficientes-matrices de Fourier son $R_A(k) = S(k) D^k$, donde D es la

matriz diagonal cuyos componentes son $D_i = e^{-j2\pi \frac{1}{N_T} i}$, así pues:

$$\begin{aligned} \text{tr}(R_n^{-1} R_p(\tau)) &= \sum_{k=0}^{N_T-1} \text{tr}(R_n^{-1} R_A(k)) e^{j2\pi \frac{k}{N_T} \tau} = \sum_{k=0}^{N_T-1} S(k) \text{tr}(R_n^{-1} D^k) e^{j2\pi \frac{k}{N_T} \tau} \\ &= \sum_{k=0}^{N_T-1} S(k) \text{tr}(\sigma_n^{-2} D^k) e^{j2\pi \frac{k}{N_T} \tau} = L \cdot \frac{S[0]}{\sigma_n^2} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 6.18}$$

$$\text{tr}(D^k) = L \delta(k) \quad \text{Ecuación 6.19}$$

En el caso de ruido estacionario, el término $\text{tr}(R_n^{-1} R_p(\tau))$ es asintóticamente independiente de τ como R_n^{-1} es asintóticamente Toeplitz²⁸. [4]

²⁸ Una matriz es Toeplitz cuando los elementos de las diagonales simétricas respecto a la diagonal central son iguales.

6.2.4.1 Evaluación del CRLB

Es más adecuado en este caso evaluar la aproximación CRLB para baja SNR en términos de las segundas derivadas:

$$\begin{aligned} CRLB(\tau_s) &\simeq \frac{-1}{E_X \nabla_{\tau_s}^2 \ln \rho_2(x | \tau_s)} = \frac{-1}{E_X \nabla_{\tau_s}^2 \ln M(x | \tau_s)} \\ &= \frac{-1}{tr(R_n^{-1} R_p(\tau_s) R_n^{-1} \nabla_{\tau_s}^2 R_p(\tau_s))} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 6.20}$$

Usando aquí el modelo de Fourier de la matriz correlación,

$$R_p(\tau_s) = \sum_{k=0}^{N_T-1} R_A \quad k \quad e^{j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s} \quad \text{Ecuación 6.21}$$

Asumiendo ruido blanco $R_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}$, obtenemos exactamente el mismo resultado para CRLB que en el caso anterior cíclico Gaussiano,

$$CRLB \quad \tau_s \simeq \frac{1}{4\pi^2 T_0 B} \left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{p,T}^2} \right) \gamma_p^2 \quad \text{Ecuación 6.22}$$

Ambos CRLB coinciden asintóticamente para L grandes incluso si no asumimos ruido blanco. Este resultado era de esperar, así la matriz usada en la métrica gaussiana puede ser aproximada en la región de baja SNR como:

$$R_n + R_p^{-1} \simeq R_n^{-1} - R_n^{-1} R_p R_n^{-1} \quad \text{Ecuación 6.23}$$

A continuación, la métrica para el caso no Gaussiano puede ser usada.[4]

6.2.4.2 Discriminación del púlsar entre el ruido

Ahora vamos a examinar la media y la varianza de la nueva métrica $Z(x|\tau) = x^H A(\tau)x$, con $A = R_n^{-1} R_p(\tau) R_n^{-1}$. Esto ayudará a determinar el tiempo de integración necesario cuando la señal púlsar empiece a ser distinguible del ruido. Además más tarde se verá en detalle como el umbral de distinguibilidad determina aproximadamente la región operante donde la deducida CRLB es aplicable. Notar que para esta métrica, el conocimiento del ruido y la potencia de la señal no es necesario pero podrá serlo para generar información fiable. Para este término, tenemos que $x = p + n$, y

$$Z(x|\tau) = x^H A(\tau)x \quad \text{Ecuación 6.24}$$

$$= p^H A(\tau)p + n^H A(\tau)n + 2 \operatorname{Re}(p^H A(\tau)n) \quad \text{Ecuación 6.25}$$

Asumimos que hay algún error de sincronismo, siendo τ' el retardo real. Así pues, como el ruido y la señal púlsar no son correladas, la esperanza de $Z(x|\tau)$ es:

$$Z(\tau, \tau') = E_x Z(x, \tau) = \operatorname{tr}(R_n^{-1} R_p(\tau) R_n^{-1} R_p(\tau')) + \operatorname{tr}(R_n^{-1} R_p(\tau)) \quad \text{Ecuación 6.26}$$

$$Z_p(\tau, \tau') = \operatorname{tr}(R_n^{-1} R_p(\tau) R_n^{-1} R_p(\tau')) \quad \text{Ecuación 6.27}$$

Como hemos visto antes, el segundo término de la esperanza es independiente de τ . Así pues, únicamente el primer término, $Z_p(\tau, \tau')$ puede obtener la discriminación temporal. De otra manera, cuando $|\tau - \tau'| > T_p$, donde T_p es la duración del pulso, tenemos que $Z_p(\tau, \tau') \cong 0$. Para evaluar la calidad de la métrica, esta discriminación tiene que ser comparada con el nivel de ruido métrico equivalente.

La covarianza del ruido equivalente es evaluado como:

$$\begin{aligned} R_z(\tau, \tau') &= E_x |Z(x|\tau) - Z(\tau, \tau')|^2 \\ &= E_x |Z(x|\tau)|^2 - |Z(\tau, \tau')|^2 \end{aligned} \quad \text{Ecuación 6.28}$$

Asumimos estadística Gaussiana para la señal pulsar para obtener una expresión más informativa y sencilla. Al evaluar la expresión

$$E_x |Z(x|\tau)|^2 = E_x |x^H A(\tau)x|^2 \quad \text{se obtiene:}$$

$$E_x |Z(x|\tau)|^2 = \text{tr}^2(A(\tau)R_x(\tau)) + (k-1)\text{tr}((A(\tau)R_x(\tau))^2)$$

$$R_z(\tau, \tau') = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{\text{tr}^2(A(\tau)R_p(\tau'))}{\text{tr}((A(\tau)R_x(\tau))^2)} \quad \text{Ecuación 6.29}$$

donde $K = 2$ o 3 para datos complejos o reales, respectivamente. Este ratio tiende a infinito para L grandes. La tendencia asintótica es examinada por medio del siguiente ejemplo:

Consideramos el caso de ruido blanco, $R_n = \sigma_n^2 I$, una R_p diagonal y SNR baja. Consideramos que $\tau = \tau'$ para evaluar la calidad de discriminación del tiempo óptimo y entonces dejamos la dependencia de las matrices con las variables temporales. Así pues:

$$\text{tr}((AR_x)^2) \simeq \text{tr}((AR_n)^2) = \text{tr}((R_n^{-1}R_p)^2)$$

$$\text{tr}^2(AR_p) = \text{tr}^2((R_n^{-1}R_p)^2)$$

$$R_z(\tau, \tau') = \frac{1}{k-1} \text{tr}((R_n^{-1}R_p)^2) \quad \text{Ecuación 6.30}$$

Para el caso de ruido blanco y haciendo explícita la dependencia con la longitud de integración L , se obtiene:

$$\Gamma_L = R_z(\tau, \tau) = \frac{1}{(k-1)\sigma_n^4} \text{tr} R_p^2 = \frac{1}{(k-1)\sigma_n^4} N_I \sum_{k=0}^{N_T-1} \sigma_p^4 \quad \text{Ecuación 6.31}$$

donde $N_I = T_0/T$ es el número de periodos de integración del púlsar, T_0 el tiempo de observación y T el periodo del púlsar. N_T es el número de muestras por periodo, el cual es $N_T = T/T_s = TB$, donde T_s es el periodo de muestreo y B el correspondiente ancho de banda. Se puede expresar el número de muestras de integración como $L = N_I N_T = T_0 B$. Así pues se obtiene:

$$\Gamma_L = \frac{1}{(k-1)\sigma_n^4} N_I N_T \frac{1}{N_T} \sum_{k=0}^{N_T-1} \sigma_p^4 \quad k = \frac{1}{(k-1)} L \left(\frac{\sigma_{p,T}^2}{\sigma_n^2} \right)^2 \frac{1}{N_T} \sum_{k=0}^{N_T-1} \frac{\sigma_p^4[k]}{\sigma_{p,T}^4} \quad \text{Ecuación 6.32}$$

El púlsar será distinguible cuando Γ_L exceda un umbral dado, Γ_{th} . La ecuación final es expresada en términos del número de muestras de integración y la SNR media. ξ_p es un factor dependiente de la forma del púlsar. Un análisis más detallado muestra que este factor es proporcional al ciclo de trabajo del púlsar. [4]

$$L \cdot \left(\frac{\sigma_{p,T}^2}{\sigma_n^2} \right)^2 \geq (k-1) \Gamma_{th} \xi_p$$

$$\xi_p = \frac{\sigma_{p,T}^4}{\frac{1}{N_T} \sum_{k=0}^{N_T-1} \sigma_p^4 \quad k} \quad \text{Ecuación 6.33}$$

6.2.5 Evaluación de la realización: Regiones de funcionamiento

Consideramos el comportamiento del error temporal del algoritmo ML con respecto al previsto por el CRLB. Diferentes regiones pueden ser distinguidas en los correspondientes gráficos del error temporal (Ilustración 6.1 y Ilustración 6.2):

- Región de saturación: la función de densidad de probabilidad del error temporal es prácticamente uniforme sobre el periodo del púlsar e igual a su valor a priori $\sigma_\tau = \frac{1}{\sqrt{12}}T$
- Región subumbral: el error de estimación de la varianza parte substancialmente de CRLB a SNR por debajo del umbral. El umbral decrece con tiempos de integración más largos.
- Región CRLB: el CRLB es un umbral más bajo y estrecho para la realización del estimador ML, mejorando a SNRs más altas. Dentro de esta región podemos distinguir dos subregiones:
 1. La región de baja SNR donde previamente derivamos las aplicaciones CRLB.
 2. La región de alta SNR donde la señal de interés es más fuerte que el ruido. Aquí una leve saturación es observada debida al propio ruido del púlsar (pulsos individuales aleatorios). El error temporal en esta región decrece para tiempos de integración más largos. [4]

6.2.5.1 El CRLB y el efecto umbral

El CRLB es un límite válido, justo y bajo para la realización de los algoritmos ML en la región de error pequeño. Cuando la función ML es maximizada, igualando su derivada a cero, se asume que el ruido es localizado en la vecindad del corte con cero, donde la derivada es aproximadamente lineal (asunción de error pequeño).

Donde el ruido es suficientemente alto, o el tiempo de integración es demasiado bajo, el ruido causa la entrada a la región no lineal de la deducción de ML. Así pues, proporcionamos aquí una estimación del umbral de operación del CRLB basado en esta suposición. Se mostrará que el criterio es sensible a la forma del pulso.

Una justificación del procedimiento utilizado es interpretar el umbral como el punto donde el error de estimación no es más grande que el gaussiano. Como la gaussianidad del error de estimación es una propiedad fundamental en la región de operación del CRLB para un tiempo de integración y SNR, parece razonable determinar como umbral el punto donde el CRLB alcanza un valor dado (el cual dependerá de la forma del pulso). Este punto puede ser calibrado para cada forma de pulso. Entonces, para determinar el umbral de operación del algoritmo ML, determinamos $\Gamma_{th}^2 = CRLB \tau$. Como una aproximación, establecemos un porcentaje η tal que se obtiene que la condición umbral para el tiempo de integración y SNR en el caso ruido blanco y el tiempo expresado en muestras, $\Gamma_{s,th}^2 = CRLB \tau_s$, como:

$$\tau_{s,th}^2 = \frac{6\eta}{4\pi^2} \frac{\frac{1}{N_T^2} \sum_k |S[k]|^2 k^2}{\frac{1}{N_T^4} \sum_k |S[k]|^2 k^4}$$

$$CRLB \tau_s = \frac{1}{4\pi^2 L} \left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{p,T}^2} \right)^2 \frac{1}{\sum_k \left| \frac{S[k]}{S[0]} \right|^2 \frac{k^2}{N_T^2}}$$

$$L \cdot \left(\frac{\sigma_{p,T}^2}{\sigma_n^2} \right)^2 \geq \phi_p = \frac{1}{6\eta} \frac{\sum_k \left| \frac{S[k]}{S[0]} \right|^2 \frac{k^4}{N_T^4}}{\left(\sum_k \left| \frac{S[k]}{S[0]} \right|^2 \frac{k^2}{N_T^2} \right)^2} \quad \text{Ecuación 6.34}$$

El cual es un umbral similar como el derivado a partir de la distinguibilidad del púlsar entre el ruido.

Comentarios: aquí es importante tener en cuenta una consideración. La derivación anterior ha asumido la derivabilidad de la esperanza de la métrica con continuidad más allá de la tercera derivada. El correspondiente valor para el umbral es razonable si las derivadas de orden más alto no son anormalmente altas. Sin embargo la constante umbral ϕ_p puede ser calibrada para cualquier pulso usando una simulación numérica, y extrapolando el resultado a otros valores de L y SNR . Aunque un modelo aproximado ha sido usado en los resultados derivados, el CRLB y su umbral son sensibles a la forma real del pulso y un análisis más detallado debería utilizar los modelos reales digitalizados del púlsar.

Pulso Gaussiano: la evaluación de la covarianza del error temporal es altamente dependiente del modelo del púlsar. El CRLB y la condición umbral han sido evaluadas para un modelo gaussiano usando el 50% de intensidad de duración T_{50} . El CRLB es proporcionado por la siguiente aproximación:

$$CRLB \tau \simeq \frac{1}{T_0 B} \left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{p,T}^2} \right)^2 \frac{2\sqrt{\pi}}{(2\ln 2)^{3/2}} \frac{T_{50}}{T} T_{50}^2 \quad \text{Ecuación 6.35}$$

Y la condición umbral es calibrada por:

$$CRLB \tau \leq \frac{0.23^2}{2\ln 2} T_{50}^2 \quad \text{Ecuación 6.36}$$

la cual establece el límite inferior necesario en $L \cdot \text{SNR}^2$.

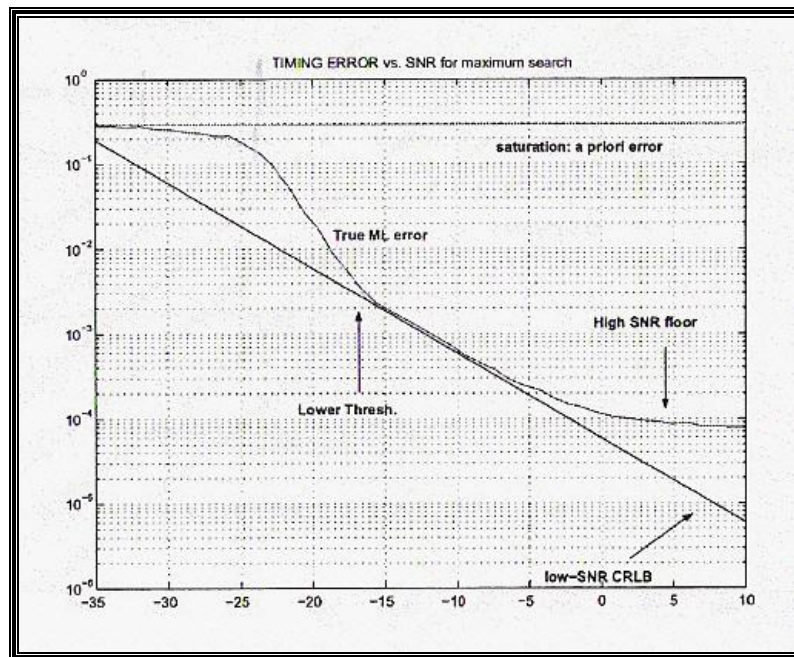


Ilustración 6.1: CRLB para baja SNR. [4]

El gráfico anterior muestra el dibujo del CRLB para baja SNR (aproximación baja SNR usada en este estudio para el CRLB real) versus la realización real del algoritmo ML para la estimación temporal, obtenido para un pulso rectangular de ciclo de trabajo 25%. Las unidades del error temporal cuadrático medio corresponden a la normalización con respecto al periodo del púlsar T , dibujado versus la SNR media en dB. La región de saturación del error a priori a $1/\sqrt{12}$ y el suelo de alta SNR determinan el rango operativo del algoritmo ML. Al umbral bajo, la realización real parte desde el CRLB de SNR bajo y aumenta hasta alcanzar la saturación.

En la región subumbral, el error temporal es inesgado y no es más grande que el gaussiano. La región operativa de CRLB de baja SNR es válida sobre el umbral y antes de que el efecto del suelo empiece a ser importante a alta SNR. Teniendo en cuenta las SNR habituales para una antena de área efectiva $A_e=10$ metros cuadrados, los algoritmos de estimación temporal nunca operarán en la región del suelo (alta SNR).

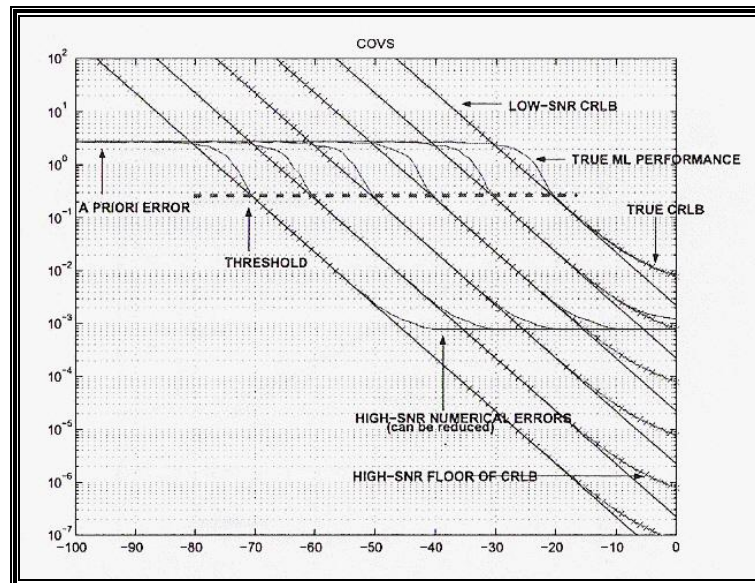


Ilustración 6.2: Realización del error temporal. [4]

Este segundo gráfico muestra el dibujo de la realización del error temporal del algoritmo ML para un modelo de potencia gaussiano y diferentes longitudes de integración (diferentes en factores de 100). La desviación estándar del error temporal normalizado a la desviación estándar del pulso gaussiano es dibujado respecto la SNR media (dB) de la señal púlsar. Las estadísticas de la señal han sido consideradas gaussianas.

Diversos efectos pueden ser observados:

- (a) El umbral aparece a la misma varianza del error temporal en todos los casos, lo que constituye la verificación experimental de las ecuaciones del umbral teóricas. Se puede observar como el error temporal aumenta escaladamente por debajo del SNR umbral.
- (b) Por encima del umbral, el CRLB real coincide con la realización del algoritmo de estimación temporal ML (para una longitud de integración corta).
- (c) El CRLB real alcanza el suelo a SNR alta para una longitud de integración finita debido a la naturaleza estocástica intrínseca de la señal.
- (d) Sólo una cuadrícula finita de hipótesis temporales es seguida, así que el suelo numérico ocurre para todas las longitudes de integración suficientemente altas (esto puede ser reducida o eliminada por refinamiento del algoritmo de seguimiento usando métodos gradientes), donde el error numérico es más grande que el error temporal final inducido por el ruido.
- (e) La región de operación de las ecuaciones derivadas está contenida entre el suelo de alta SNR y el umbral de baja SNR.
- (f) A muy baja SNR, la varianza del error temporal se satura hasta su valor a priori.

- (g) Notar la influencia de los 100 factores entre las diferentes longitudes de integración (número de muestras procesadas): cada vez la longitud de integración va aumentando por un factor de 100, la correspondiente desviación estándar del error temporal decrece por un factor de 10. [4]

6.2.6 Estimación temporal de la fase

Como se ha demostrado anteriormente la estimación de la fase se puede llevar a cabo mediante la maximización de las métricas del tipo $Z(x|\tau_s) = x^H A(\tau_s)x$ en el dominio del tiempo, donde $A(\tau_s) = R_n^{-1} R_p(\tau_s) R_n^{-1}$ y τ_s está expresado en unidades de tiempo en muestras. La matriz de correlación $A(\Gamma_s)$ incorpora el conocimiento de las señales del púlsar y del ruido, y para $0 \leq \Gamma_s < N_T$, es decir, para un desfase comprendido entre 0 y el número de muestras por periodo del púlsar, modela un desfase de tiempo del púlsar apropiado en muestra. En este punto, la estimación del retardo del púlsar Γ_s / N_T será considerado en el dominio frecuencial para obtener resolución submuestra para la estimación del desfase temporal. Esto será preciso si el perfil del púlsar es en banda limitada ya que puede ser interpolada por un número finito de exponenciales complejos. Si la duración del pulso del púlsar es pequeña w.r.t T y las variaciones de densidad espectral de ruido no son demasiado grandes en la banda analizada, la matriz de correlación $A(\Gamma_s)$ es razonablemente aproximada como una matriz diagonal a bloques, de $N_T \times N_T$ bloques $A_n(\Gamma_s)$, donde el tiempo discreto n es evaluado en múltiplos del periodo: $n=n_1 N_T$. Así que, en términos correspondientes a los subvectores x_n de x , cada uno contiene un solo periodo de púlsar dentro de los N_1 periodos observados. Lo que tenemos es:

$$Z(x|\tau_s) = x^H A(\tau_s)x = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x_{n_1 N_T}^H A_{n_1 N_T}(\tau_s) x_{n_1 N_T} \quad \text{Ecuación 6.37}$$

Ahora, la matriz $A_{n_1, N_T}(\tau_s)$ admite ser expresado como serie de Fourier por ser consecuencia de la matriz de correlación de un proceso cicloestacionario,

$$A_{n_1, N_T}(\tau_s) = \sum_{k=0}^{N_T-1} R_A[k] e^{j2\pi \frac{k}{N_T}(n_1 N_T - \tau_s)} = \sum_{k=0}^{N_T-1} R_A[k] e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s} \quad \text{Ecuación 6.38}$$

Así pues, si sustituimos en la ecuación de la métrica:

$$\begin{aligned} Z(x | \tau_s) &= \sum_{n_1=0}^{N_T-1} x_{n_1, N_T}^H \left(\sum_{k=0}^{N_T-1} R_A[k] e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s} \right) x_{n_1, N_T} \\ &= \sum_{k=0}^{N_T-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s} \sum_{n_1=0}^{N_T-1} x_{n_1, N_T}^H R_A[k] x_{n_1, N_T} \\ &= \sum_{k=0}^{N_T-1} y_k \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 6.39}$$

$$y_k = \sum_{n_1=0}^{N_T-1} x_{n_1, N_T}^H R_A[k] x_{n_1, N_T}$$

Con y_k , $0 \leq k < N_T - 1$ tenemos una secuencia de datos comprimida de N_T muestras de las $L=N_T N_I$ muestras originales, las cuales pueden ser usadas en las ecuaciones anteriores para maximizar $Z(x | \tau_s)$ en términos de Γ_S . En el caso de ruido blanco, $R_A[k]$ es una matriz diagonal expresada como:

$$\begin{aligned} R_A[k] &= S[k] D^k \\ [D]_i &= e^{-j2\pi \frac{1}{N_T} i} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 6.40}$$

Así que la operación $x_{n_1.N_T}^H R_A[k] x_{n_1.N_T}$ es de hecho la DFT con los pesos $S[k]$ a la frecuencia discreta de k/N_T del módulo al cuadrado de los componentes de cada subvector $x_{n_1.N_T}$, y

$$x_{n_1.N_T}^H R_A[k] x_{n_1.N_T} = S[k] \sum_{i=0}^{N_T-1} |x(n_1 N_T - i)|^2 e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} i}$$

$$y_k = S[k] \sum_{i=0}^{N_T-1} \left(\sum_{n_1=0}^{N_T-1} |x(n_1 N_T - i)|^2 \right) e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} i} \quad \text{Ecuación 6.41}$$

Como ejemplo, la matriz $A(\Gamma_s)$ permite ser definida como $A(\tau_s) = R_n^{-1} R_p(\tau_s) R_n^{-1}$, y permite que la correlación real del pulsar sea $R_p(\tau_s')$, donde queremos estimar τ_s' variando Γ_s en el modelo de correlación.

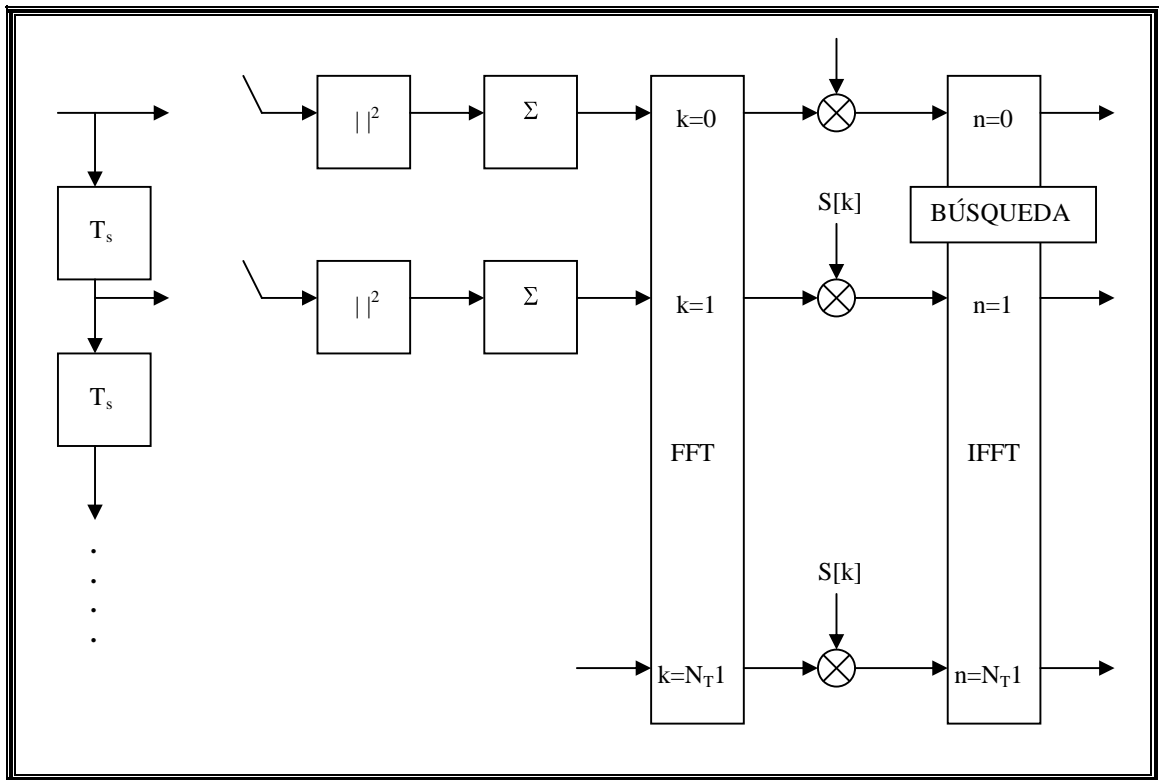


Ilustración 6.3: Estimación de fase basado en 'square timing recovery'. [4]

El esquema anterior genera un perfil promedio antes de realizar una correlación simple con el modelo de perfil de púlsar. La correlación se realiza en frecuencia para tener resolución submuestra, aunque otras aproximaciones correlación-interpolación pueden ser formuladas en el dominio temporal. [4]

6.2.6.1 Esperanza de la métrica

Analizaremos un estimador de $\hat{\tau}_s'$ a partir de la expresión $Z(x|\tau_s)$. Primero evaluaremos la esperanza, así pues:

$$E_x Z(x|\tau_s) = \sum_{k=0}^{N_T-1} (E_x y_k) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s}$$

$$E_x y_k = \text{tr}(R_A[k](R_p(\tau_s') + R_n)) \quad \text{Ecuación 6.42}$$

Pero observamos que para el caso de ruido blanco $R_n = \sigma_n^2 I$, tenemos que $\text{tr}(R_A[k]R_n) = S[k]\sigma_n^2 \text{tr}(D^k) = 0$. Así pues, para $k \neq 0$:

$$E_x y_k = S[k] \text{tr}(D^k R_p(\tau_s'))$$

$$= S[k] \sum_{k'=0}^{N_T-1} \text{tr}(D^k R_A[k']) e^{-j2\pi \frac{k'}{N_T} \tau_s'}$$

$$= S[k] \sum_{k'=0}^{N_T-1} \text{tr}(D^k S[k'] D^{k'}) e^{-j2\pi \frac{k'}{N_T} \tau_s'}$$

$$= S[k] \sum_{k'=0}^{N_T-1} (S[k'] \delta[k+k']) e^{-j2\pi \frac{k'}{N_T} \tau_s'}$$

$$= S[k] S[-k] e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s'}$$

$$= |S[k]|^2 e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s'} \quad \text{Ecuación 6.43}$$

Claramente, Z se maximiza para $\tau_s = -\tau'_s$, lo que corresponde a la combinación de ratio máximo de las componentes a múltiplos de la frecuencia de ciclo. [4]

6.2.7 Análisis Multibanda y Dispersión interestelar

Anteriormente las ecuaciones generales son derivadas bajo la hipótesis de que conocemos la matriz correlación del púlsar $R_p(r)$. En algunos casos, las expresiones particulares como CRLB's se obtienen asumiendo una estructura diagonal de $R_p(r)$. Esto sólo es válido cuando el ancho de banda en recepción es suficientemente pequeño. Para anchos de banda más grandes, aparecen componentes no negligibles en las subdiagonales de $R_p(r)$. Desafortunadamente, se ha visto que con los datos experimentales no se obtiene suficiente información para deducir la estructura detallada de $R_p(r)$. Cuando se consideran anchos de banda (B) más amplios, la dispersión interestelar media comienza a aparecer, extendiendo la duración del pulso del púlsar (hasta un límite, ya que el retardo es inversamente proporcional a $1/f^2$). Esto sería irrelevante para el procesamiento si $R_p(r)$ fuera conocido, así como la forma del modelo ampliado sería disponible. No obstante, los datos experimentales son limitados a un ancho de banda (B) pequeño.

Una alternativa al uso de deducir la forma de la señal es considerar que el vector de datos x contiene subvectores de datos correspondientes a diferentes bandas más estrechas del ancho de banda total, pero suficientemente amplias para preservar la forma del pulso. Entonces, el procesamiento combina diferentes bandas, donde para cada i -ésima banda, la matriz subcorrelación $R_p^{(i)}(\tau)$ es conocida.

La diferencia entre las consecutivas $R_p^{(i)}(\tau)$ puede ser deducida a partir del modelo de dispersión del medio interestelar y del retardo temporal dependiente de la frecuencia y de un factor escalar.

Este retardo temporal es conocido a partir del coeficiente de dispersión de cada púlsar y puede ser compensado a través de todas las sub-bandas (de hecho, la medida de la dispersión varía lentamente y debería ser seguida). Sin embargo, debería tenerse en cuenta que las señales extraídas de bandas continuas son correladas debido a la cicloestacionaridad. El valor de las correlaciones cruzadas de señales provenientes de diferentes sub-bandas no es conocido. Al menos es razonable asumir que para N_s sub-bandas de ancho de banda $B_s=B/N_s$, las componentes frecuenciales más allá de $2B_s$ pueden ser ya consideradas incorreladas.

Asumiendo incorrelación entre sub-bandas, la matriz correlación global es diagonal a bloques con bloques correspondientes a la matriz correlación (diagonal) de cada sub-banda. Así pues, se puede obtener un estimador del error temporal, $\hat{\sigma}_\tau^2$, el cual no difiere substancialmente del error temporal real en presencia de la correlación cruzada entre sub-bandas inducida por la cicloestacionaridad (esto limita básicamente a la primera sub-diagonal). Esta pequeña diferencia puede ser incorporada a un margen de seguridad para garantizar el cumplimiento de las especificaciones. Tenemos por tanto:

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{\gamma_p^2}{4\pi^2 T_0 B_s} \left(\sum_{i=0}^{N_s-1} \frac{N_p^2(i)}{N_p^2(i)} \right)^{-1} = \frac{\gamma_p^2}{4\pi^2 T_0 B_s} \left(\frac{1}{N_s} \sum_{i=0}^{N_s-1} \frac{N_p^2(i)}{N_p^2(i)} \right)^{-1} \quad \text{Ecuación 6.44}$$

En términos de púlsar y ratios de densidad de potencia de ruido espectral N_p y N_0 para cada sub-canal, el cual es básicamente la misma ecuación que para un único canal donde en cada sub-banda es usada la media SNR cuadrática. El factor de forma γ_p^2 del pulso del púlsar es considerado uniforme en todas las sub-bandas, es decir, no hay distorsión de forma. En la evaluación numérica del error de posición tomaremos simplemente una SNR a 1GHz como valor medio asumiendo adecuados límites superiores e inferiores de la banda B . [4]

7 ESTIMACIÓN DE LA FASE

7.1 Introducción

En este capítulo se presentan las simulaciones obtenidas a partir del desarrollo del algoritmo para la estimación de la fase, deducido en el capítulo sexto, a partir de programas realizados en lenguaje MATLAB. Sobre estas simulaciones se calculará cual es la estadística del error para el estimador y se comparará con el comportamiento predicho por los métodos matemáticos. Se mostrará cómo se han simulado las características propias de la señal púlsar y del ruido aditivo y como se han programado los esquemas deducidos para el algoritmo. Así mismo se mostrará cuales han sido los problemas ocasionados por la baja SNR que han dificultado estas simulaciones con los valores reales de interés y cuáles han sido las soluciones adoptadas.

7.2 Estimación

Siguiendo el esquema deducido del algoritmo para la estimación del desfase de la señal púlsar y teniendo en cuenta las características propias de la señal recibida, simulamos la estadística del error cometido a partir de un programa desarrollado en lenguaje MATLAB. Debido a la baja SNR, que provoca tiempos de integración considerablemente altos, los tiempos de procesado de las simulaciones de interés eran demasiado largos y requerían de una gran capacidad computacional por lo que fue necesaria una segunda versión del programa que agilizara estas simulaciones utilizando para ello métodos semianalíticos. A partir de esta segunda versión se realizaron las simulaciones de interés que serán comparadas con las teóricas en los siguientes apartados para verificar el comportamiento de este estimador.

7.2.1 Primera versión

En este programa hay dos partes principales que cabe diferenciar:

- La primera es la generación de la señal recibida, que está compuesta por la señal púlsar y por el ruido aditivo con sus respectivas características que se han intentado simular. Suponemos que en nuestro vector de datos únicamente almacenamos una de las dos polarizaciones y que nuestro ancho de banda es suficiente como para considerar negligible la variación de la densidad espectral de potencia y la dispersión interestelar, de acuerdo con lo estipulado en el capítulo sexto.
- La segunda es la realización de la estimación de los parámetros teóricamente desconocidos siguiendo el esquema de los algoritmos deducidos también en el capítulo anterior. Así realizamos estimaciones ML reales fijando el vector de datos y buscando el valor de la fase que maximiza el algoritmo.

7.2.1.1 Generación de la señal recibida

La señal recibida está compuesta por la señal pulsar, la cual sufre un cierto desfase, y por el ruido aditivo.

7.2.1.1.1 Señal púlsar

Como ya se ha visto la señal púlsar es una señal periódica con un periodo de repetición (T_p) durante el cual se produce un pulso variable que dura un cierto tiempo (T_d). Aún así el perfil medio de este periodo es constante y característico de cada púlsar. En nuestro caso hemos considerado un perfil de pulso con forma gaussiana.

“Gen_perfil” es la función que genera la simulación del perfil característico del pulsar necesitando como parámetros el periodo de repetición del pulsar (T_p), la duración del pulso (T_d) y la potencia de pico del pulsar (Pot) (ver Anexo B). Cada uno de los periodos son generados a partir de este perfil característico y modulados con ruido blanco de potencia unitaria. Estos periodos sufren un desfase (T_r) que es el parámetro a estimar. La función que genera cada uno de los periodos y les añade el desfase es la llamada “gen_recibida” (ver Anexo B). Más tarde se le añadirá el ruido aditivo.

Se ha generado la señal a partir de la SNR en referencia a la potencia media del periodo [26]:

$$SNR = \log_{10} \frac{\sigma_{p,T}^2}{\sigma_n^2} \quad \sigma_{p,T}^2 = \frac{1}{T_p} E_p = \frac{1}{T_p} \sum_{i=0}^{T_p-1} \sigma_p^2 \quad i \quad \text{Ecuación 7.1}$$

que es diferente de la potencia del pulso, que es la utilizada por el programa para generar la señal recibida:

$$\sigma_{pulso}^2 = \frac{E_p}{T_d} \neq \frac{E_p}{T_p} = \sigma_{p,T}^2 \quad \text{Ecuación 7.2}$$

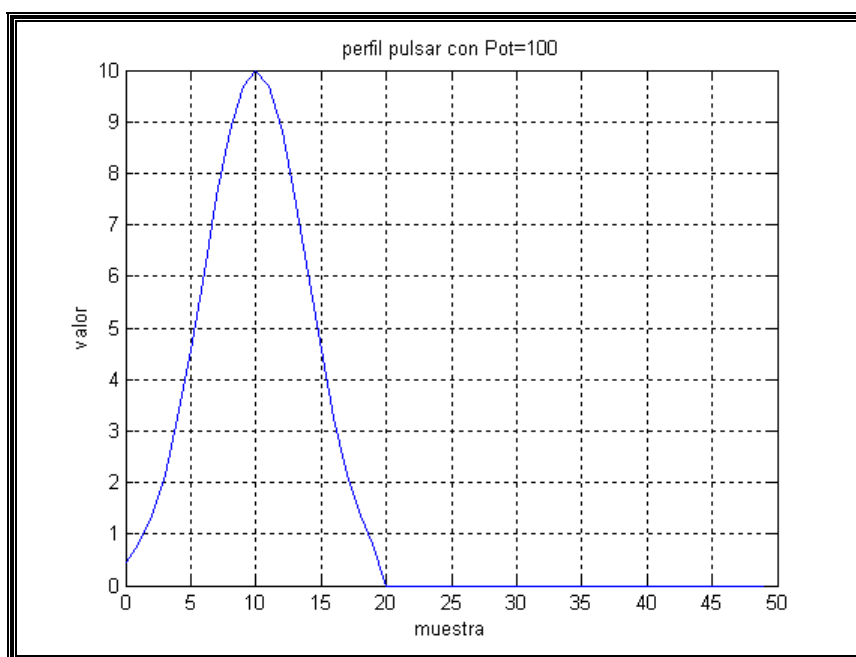


Ilustración 7.1: Perfil medio del pulso generado para $T_p=50$, $T_d=20$ y una potencia de 100.

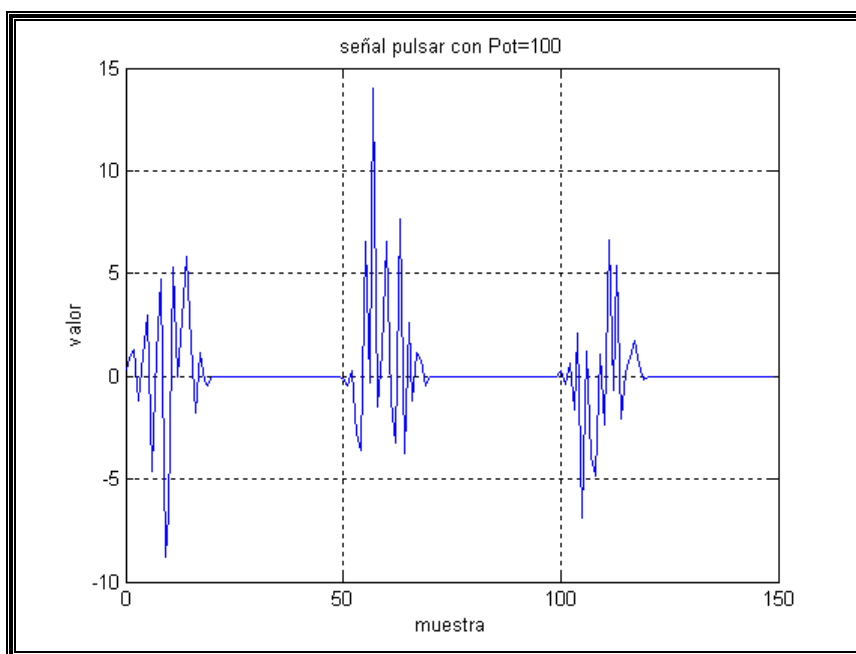


Ilustración 7.2: Tres periodos de la señal pulsar generados con el perfil anterior y modulados con ruido blanco de potencia unitaria.

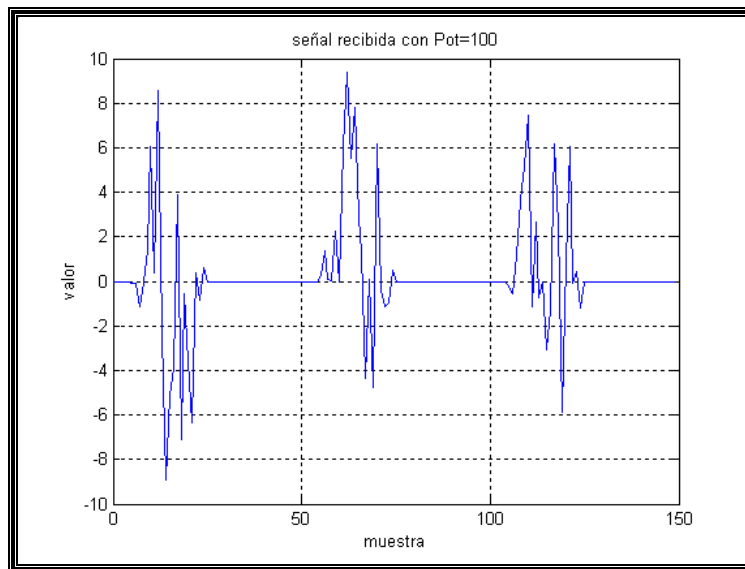


Ilustración 7.3: Tres periodos de la señal púlsar generados con el perfil anterior, modulados con ruido blanco y a los que se les ha añadido un desfase de 5 muestras.

7.2.1.1.2 Ruido aditivo

Hemos considerado un ruido aditivo gaussiano de media nula por lo que la señal total recibida tiene una forma:

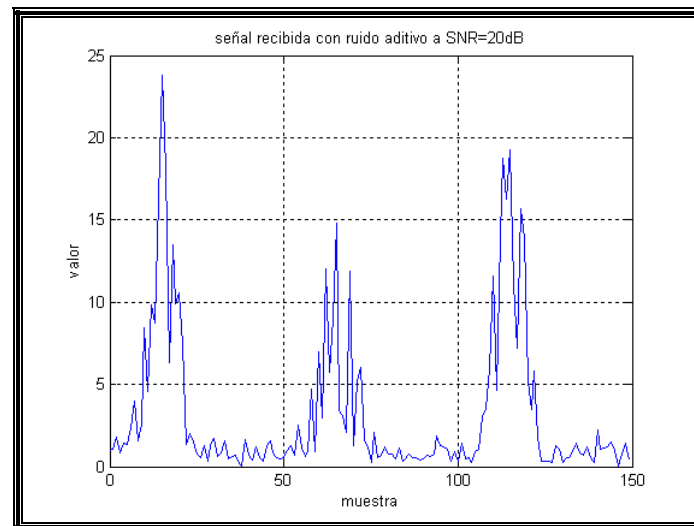


Ilustración 7.4: Módulo de la señal recibida púlsar más ruido aditivo con una SNR de 20dB.

Como en nuestro caso la SNR rondará entre los -30 y los -50dB la señal púlsar quedará totalmente enmascarada por el ruido aditivo, como se puede comprobar en la siguiente gráfica. Estos gráficos se han obtenido mediante la función 'gen_senal_recibida' (ver Anexo 2).

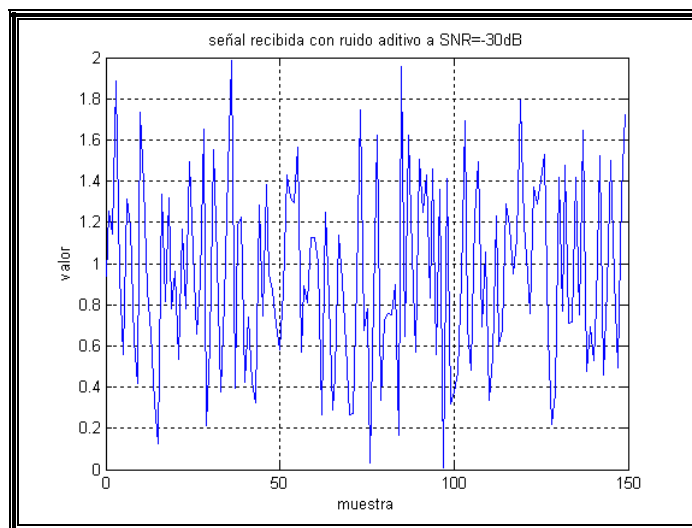


Ilustración 7.5: Módulo de la señal recibida a una SNR de -30dB.

7.2.1.2 Realización de la estimación de la fase

El esquema del algoritmo, como ya se vio en el capítulo anterior consta de diferentes etapas.

En la primera etapa se acumula el módulo al cuadrado de cada una de las componentes del periodo del pulsar, generando así un perfil de potencia total.

En la segunda etapa se realiza la DFT de la señal acumulada y se calcula la DFT del perfil utilizado. Para que fuera óptimo el algoritmo deberíamos mirar que τ es la que maximiza la métrica y para ello deberíamos mirar todas las salidas pero en nuestro caso únicamente miramos el primer armónico, de esta manera por una parte agilizamos el algoritmo pero por otra perdemos más dBs de potencia. Esto provoca un aumento en el error de la estimación.

La función que realiza la estimación es 'sincronizacion_acumulada' (ver Anexo B).

7.2.1.3 Problemática de baja SNR

Al realizar las simulaciones en la región de SNR baja, el número de muestras necesarias para la correcta estimación aumenta de manera considerable. Por ejemplo, para una SNR=-30dB se necesitaban $N_1=40.000.000$ de periodos acumulados, de tal forma que siguiendo las ecuaciones para CRLB deducidas en el capítulo anterior, para una SNR=-50dB para mantener la misma varianza del error se necesitaría:

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{cte}{N} \frac{1}{SNR^2} \quad \text{Ecuación 7.3}$$

y para que se cumpla:

$$\sigma_{\tau}^2(-30dB) = \sigma_{\tau}^2(-50dB) \quad \text{Ecuación 7.4}$$

$$\frac{\sigma_{\tau}^2(-30dB)}{\sigma_{\tau}^2(-50dB)} = \frac{\frac{1}{N_1 SNR_1^2}}{\frac{1}{N_2 SNR_2^2}} = \frac{N_2 SNR_2^2}{N_1 SNR_1^2} = 1 \quad \text{Ecuación 7.5}$$

$$N_2 = N_1 \left(\frac{SNR_1^2}{SNR_2^2} \right)^2 = 10^4 \cdot N_1 \quad \text{Ecuación 7.6}$$

Las muestras ahora necesarias para -50dB eran 10^4 veces las necesarias para -30dB. Si el tiempo de procesado era de unos 105 minutos para una SNR de -30dB, el tiempo necesario para -50dB sería de 1.050.000 minutos lo que equivaldría a aproximadamente 729 días. Este tiempo de procesado era inviable, es por esta razón que se optó por otros métodos de simulación: los semianalíticos.

7.2.2 Segunda versión: métodos semianalíticos

A grandes rasgos, las técnicas semianalíticas o también conocidas como casianalíticas (QA: quasianalytical) son combinaciones de algunos elementos de análisis matemáticos y de simulación. No hay un único procedimiento QA. La particular combinación de simulación y herramientas analíticas que son usadas depende del problema a tratar. La parte analítica de QA implica un conocimiento a priori (o unas suposiciones) las cuales permiten la construcción de la abstracción que puede ser construida 'analíticamente'. Es esta información a priori la que nos suministra el potencial para reducir el tiempo de ejecución. Las técnicas QA no derivan de los procedimientos de estimación estadística estándar y son quizás como variaciones de la metodología de simulación como mejor pueden ser consideradas. Por tanto, los estimadores asociados no pueden ser fácilmente interpretados como un estimador con una distribución. Más bien, es mejor considerar las técnicas QA como métodos computacionales los cuales proveen resultados con grados variables de aproximación dependiendo de cada caso. [35]

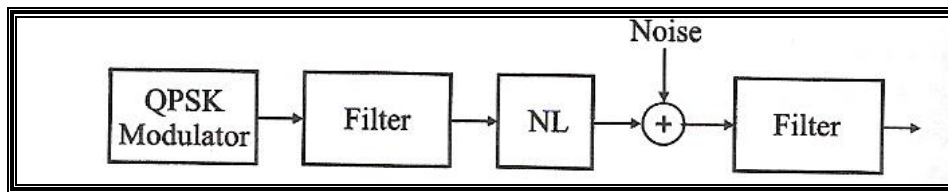


Ilustración 7.6: Ejemplo de disposición del sistema donde las técnicas semianalíticas pueden ser aplicadas. [35]

La mayoría de aplicaciones de las técnicas QA tienen los siguientes temas comunes. El sistema, cualquiera que sea, es asumido como lineal al menos desde el punto de entrada de todas las fuentes de ruido gaussiano hasta la entrada al dispositivo de decisión (Ilustración 7.6). Así, antes de la primera fuente de ruido, el sistema podría ser no lineal. La utilidad de esta asunción es doble: primero, como es bien conocido, un proceso gaussiano filtrado linealmente permanece gaussiano; y segundo, porque el sistema es lineal desde el punto de inserción del ruido, las superposiciones se mantienen. Esto tiene dos implicaciones importantes. La superposición implica que la señal y el ruido pueden ser tratados por separado y las correspondientes respuestas añadidas al final. Segundo, el hecho que el ruido (si es gaussiano) permanezca gaussiano sugiere la posibilidad de omitir su generación explícita, a partir de este hecho podemos decir que en el instante de decisión una variable aleatoria de distribución normal puede ser añadida a la muestra sin ruido para formar la variable de decisión. Así, la idea general es separar el problema en dos partes, en un lado la generación de la señal sin ruido (la parte de la simulación) y en el otro con la contribución del ruido a la señal muestreada (parte analítica). Conceptualmente, el proceso consiste en reemplazar las fuentes de ruido actuales por una fuente de ruido “equivalente” (ENS: equivalent noise source) antes del dispositivo de decisión (Ilustración 7.7). [35]

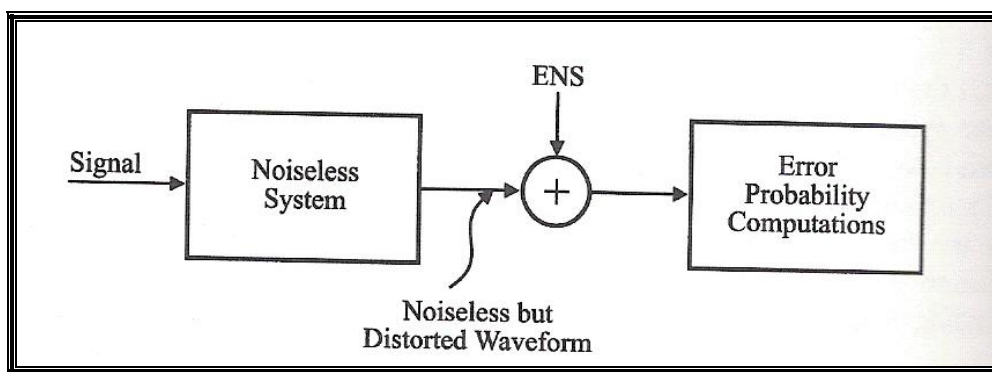


Ilustración 7.7: Ilustración de la estructura de simulación genérica aplicando las técnicas semianalíticas. [35]

Esta metodología puede ser generalizada, al menos en principio, para permitir una distribución arbitraria para el ENS. Una vez podemos admitir esa posibilidad, nosotros podemos además (otra vez en principio) alejar la asunción lineal y postular que la ENS puede ser tomada en cuenta por todos los efectos que el ruido induce. Así, el principal marco para los temas bajo discusión pueden ser resumidos como:

- Todos los efectos del ruido pueden ser considerados aditivos como entrada en el dispositivo de decisión, sin tener en cuenta cuantas fuentes de ruido hay o donde están situadas. Esta fuente artificial es el ENS.
- La función de densidad de probabilidad del ENS es de una forma conocida y especificada por el usuario.
- La simulación es conducida por el cese de las fuentes de ruido y la generación única de la señal.

La eficiencia de los métodos QA aumenta en parte porque el ruido no tiene generación explícita, aunque esta ventaja es en parte compensada por otro cómputo. [35]

7.2.2.1 Aplicación de métodos semianalíticos

Como ya se ha comentado previamente, para evitar tiempos de simulación tan elevados se optó por la utilización de métodos semianalíticos. En nuestro caso en particular lo que nos permite es generar directamente la señal ya acumulada en lugar de generar cada uno de los periodos y acumularlos. De esta manera el tiempo de ejecución disminuye de manera espectacular.

En la primera parte del esquema del algoritmo tenemos la generación de la señal a tratar que consiste en la acumulación del módulo al cuadrado de cada una de las muestras de todos los periodos observados, como muestra la Ilustración 7.8.

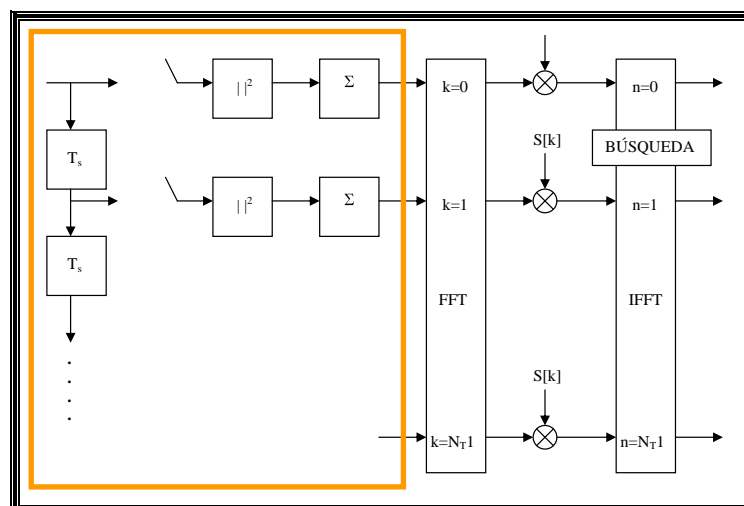


Ilustración 7.8: Tratamiento de la señal

Esta primera fase se puede esquematizar de la siguiente manera:

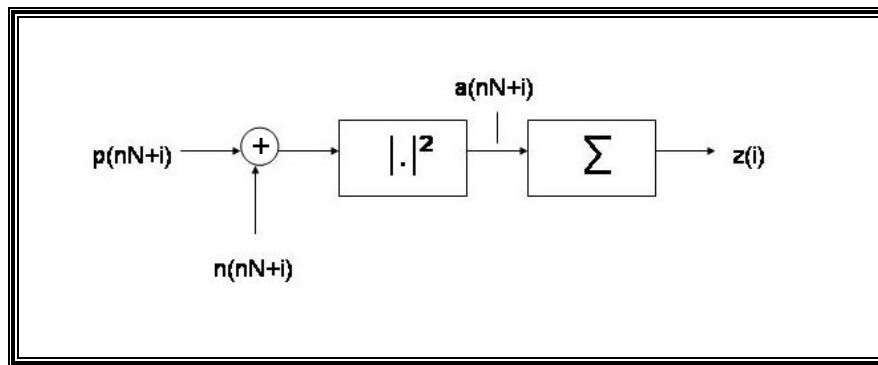


Ilustración 7.9: Esquema de generación de señal acumulada

Lo que interesa es generar directamente la señal 'z'. Para ello es necesario conocer que tipo de señal es y cuales son los parámetros que necesitamos para generarla. Con este propósito haremos uso del Teorema Central del Límite.

7.2.2.1.1 Teorema Central del Límite (CLT)

Dado n variables aleatorias independientes x_i , su suma será:

$$x = x_1 + \dots + x_n \quad \text{Ecuación 7.7}$$

Esta es una variable aleatoria con media $m = m_1 + \dots + m_n$ y varianza $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$. El teorema central del Límite afirma que bajo condiciones generales, la función distribución $F(x)$ de x aproxima a una distribución normal con la misma media y varianza cuando n aumenta:

$$F(x) \approx G\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad \text{Ecuación 7.8}$$

Por otro lado, si las variables aleatorias x_i son de tipo continuo, la función de densidad de probabilidad $f(x)$ de x se aproxima como una densidad normal:

$$f(x) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \quad \text{Ecuación 7.9}$$

Este importante teorema puede ser afirmado como un límite:

$$\text{si } z = \frac{x-m}{\sigma} \text{ entonces } F_z(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(z) \quad \text{Ecuación 7.10}$$

y

$$f_z(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad \text{Ecuación 7.11}$$

para el caso general y el caso continuo respectivamente.

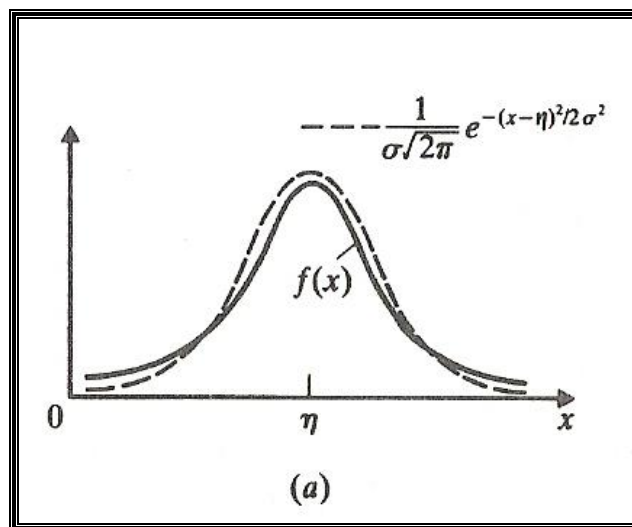


Ilustración 7.10: Aproximación de la función de densidad de probabilidad para CLT [36]

La naturaleza de la aproximación del CLT y el valor requerido de n para un límite de error especificado depende de la forma de las densidades $f_i(x)$. Si las variables aleatorias x_i son independientes e idénticamente distribuidas, el valor $n=30$ es adecuado para la mayoría de aplicaciones. De hecho, si las funciones $f_i(x)$ son suaves, valores de n tan bajos como 5 pueden ser usados. [36]

7.2.2.1.2 Aplicación del Teorema Central del Límite

El Teorema Central del Límite dice que cuando el número de periodos acumulados es suficientemente alto 'z' se comporta aproximadamente como una variable gaussiana. A través de la función 'verificacion_gausiana' (ver Anexo B), que utiliza la función 'qqplot' de MATLAB, comprobamos que realmente se cumple. La función 'qqplot' realiza una gráfica que compara las estadísticas de las muestras de la señal de interés respecto a las teóricas de una distribución normal. Si la señal tiene una distribución normal el gráfico será aproximadamente una recta (más marcado entre los valores de -1 a 1), como se muestra en la Ilustración 7.11 que sirve de ejemplo.

En las Ilustración 7.12, Ilustración 7.13 y Ilustración 7.14 se puede observar como conforme va aumentando el número de periodos acumulados, la señal acumulada se comporta cada vez más como una señal gaussiana ya que la recta está cada vez más definida.

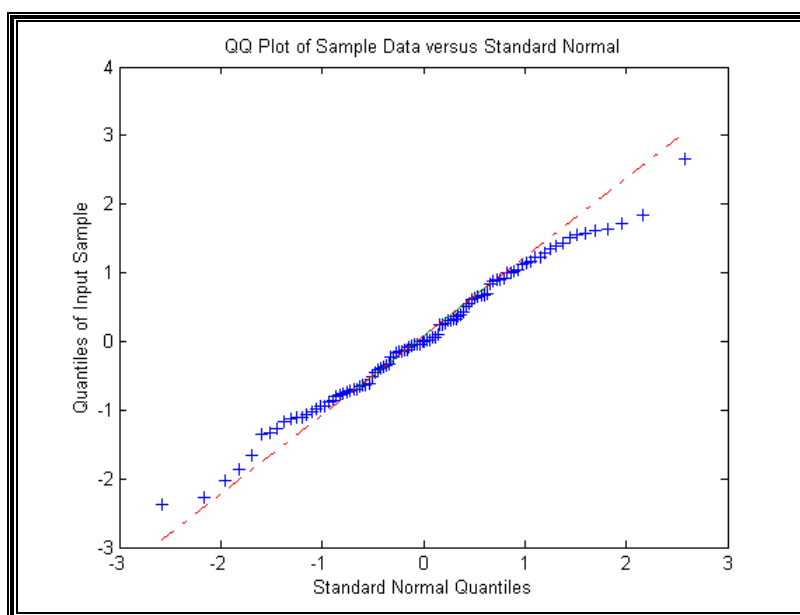


Ilustración 7.11: Ejemplo de distribución normal (qqplot).

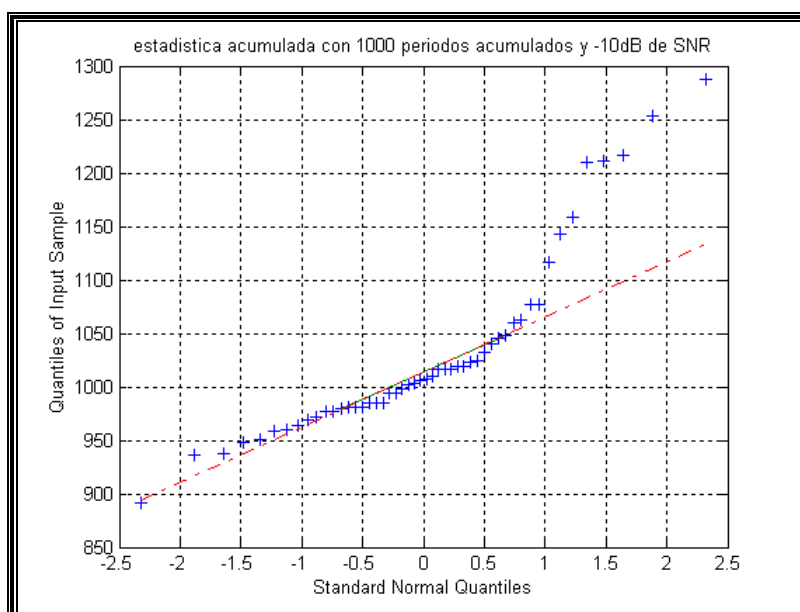


Ilustración 7.12: QQplot para señal acumulada con 1000 periodos

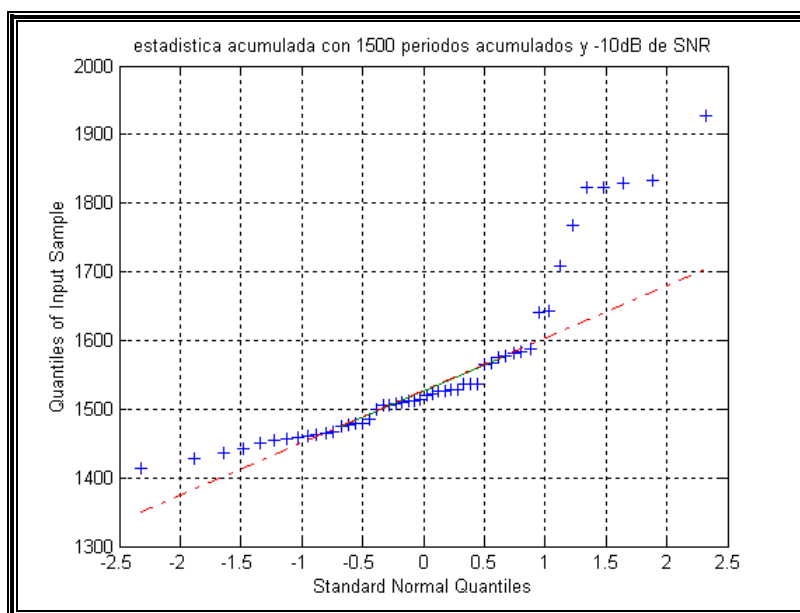


Ilustración 7.13: QQplot para señal acumulada con 1500 periodos.

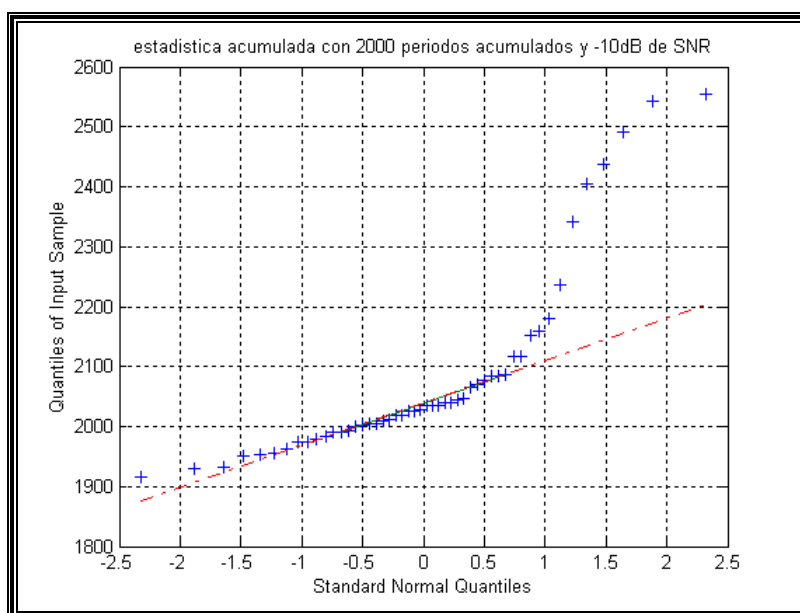


Ilustración 7.14: QQplot para señal acumulada con 2000 periodos.

Así pues, la señal acumulada para N_I grandes se comporta como una señal gaussiana, de tal manera que para poder generarla únicamente queda conocer cuales son sus estadísticas. Siguiendo con el esquema de generación de la señal acumulada, los parametros que nos interesa conocer, por tanto, son la media y la varianza de z .

7.2.2.1.3 Estadística de la señal acumulada

Por una parte tenemos que el módulo al cuadrado de la suma de las señales del pulsar y del ruido generan la señal 'a' y que la acumulación de las muestras de los diferentes periodos de 'a' generan la señal 'z'. De esta manera tenemos:

$$a(nN_T + i) = |p(nN_T + i) + n(nN_T + i)|^2 =$$

$$= |p(nN_T + i)|^2 + |n(nN_T + i)|^2 + 2 \operatorname{Re} p^*(nN_T + i) \cdot n(nN_T + i) \quad \text{Ecuación 7.12}$$

$$z(i) = \sum_{n=0}^{N_I-1} a(nN_T + i) \quad \text{Ecuación 7.13}$$

Teniendo en cuenta que la señal pulsar se puede considerar como una variable gaussiana con potencia el perfil medio del periodo $\sigma_p^2(i)$ y de media nula, que el ruido es una variable gaussiana con potencia σ_n^2 y media nula y que ambas son señales independientes y por tanto incorreladas, las estadísticas de la señal 'z' son las siguientes:

$$m_{z(i)} = E z(i) = E \left\{ \sum_{n=0}^{N_I-1} a(nN_T + i) \right\} =$$

$$= E \left\{ \sum_{n=0}^{N_I-1} |p(nN_T + i)|^2 \right\} + E \left\{ \sum_{n=0}^{N_I-1} |n(nN_T + i)|^2 \right\} + E \left\{ \sum_{n=0}^{N_I-1} 2 \operatorname{Re} p^*(nN_T + i) \cdot n(nN_T + i) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N_I-1} E |p(nN_T + i)|^2 + \sum_{n=0}^{N_I-1} E |n(nN_T + i)|^2 + \sum_{n=0}^{N_I-1} 2 \operatorname{Re} E p^*(nN_T + i) \bullet n(nN_T + i) = \\
&= N_I \sigma_p^2(i) + N_I \sigma_n^2 = N_I (\sigma_p^2(i) + \sigma_n^2) \quad \text{Ecuación 7.14}
\end{aligned}$$

$$\sigma_z^2(i) = E |z(i)|^2 - E^2 z(i) = N_I (\sigma_p^2(i) + \sigma_n^2)^2 \quad \text{Ecuación 7.15}$$

Ya que

$$\begin{aligned}
E |z(i)|^2 &= E \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N_I-1} a(nN + i) \right|^2 \right\} = E \left\{ \sum_{n=0}^{N_I-1} \sum_{n'=0}^{N_I-1} a^*(nN + i) a(n'N + i) \right\} = \\
&= E \left\{ \sum_{n'=n} a^2(nN_T + i) \right\} + E \left\{ \sum_{n \neq n'} a(nN + i) a(n'N + i) \right\} = \\
&= E \left\{ \sum_{n'=n} a^2(nN_T + i) \right\} + E \left\{ \sum_{n \neq n'} a(nN + i) a(n'N + i) \right\} = \\
&= N_I E a^2(nN_T + i) + (N_I^2 - N_I) E a(nN + i) a(n'N + i) = \\
&= N_I 2(\sigma_p^2(i) + \sigma_n^2)^2 + (N_I^2 - N_I)(\sigma_p^2(i) + \sigma_n^2)^2 = (N_I^2 + N_I)(\sigma_p^2(i) + \sigma_n^2)^2 \quad \text{Ecuación 7.16}
\end{aligned}$$

Donde $E a^2(nN_T + i) = 2(\sigma_p^4(i) + \sigma_n^4 + 2\sigma_p^2(i)\sigma_n^2) = 2(\sigma_p^2(i) + \sigma_n^2)^2$ ¹ y

$$E a(nN + i) a(n'N + i) = E a(nN + i) E a(n'N + i) = (\sigma_p^2(i) + \sigma_n^2)^2$$

¹ Donde se ha utilizado la siguiente propiedad conocida para una variable gaussiana compleja 'y':

$$E |y|^4 = 2E^2 |y|^2$$

Una vez conocemos teóricamente cuales son las estadísticas de la señal acumulada comprobamos que realmente cuando aumentamos N_i las estadísticas reales se aproximan a las teóricas. Esto lo verificaremos a través de la función 'verificacion_estadísticas' (ver AnexoB).

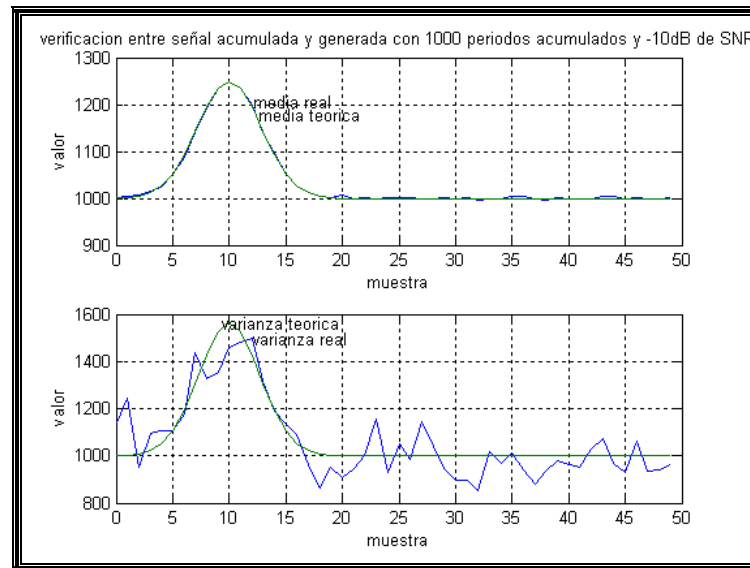


Ilustración 7.15: Comparación media y varianza teórica (verde) y real (azul)
 $N_i=1000$

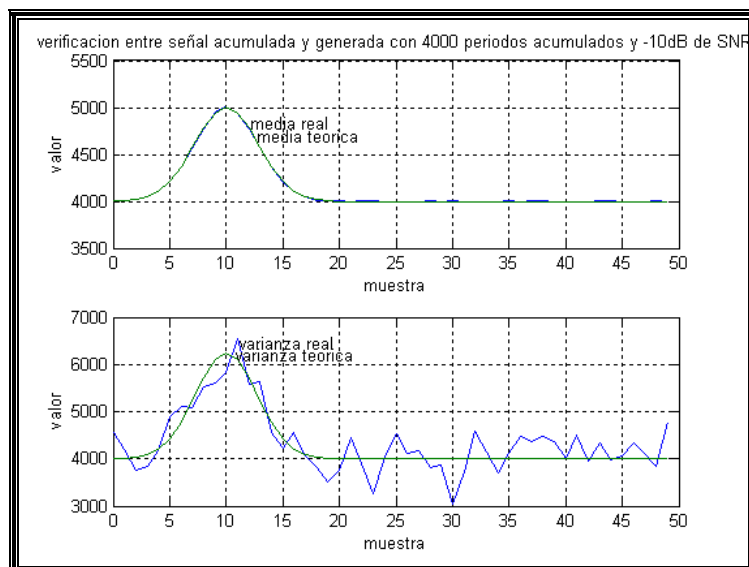


Ilustración 7.16: Comparación media y varianza teórica (verde) y real (azul) para $N_I=4000$

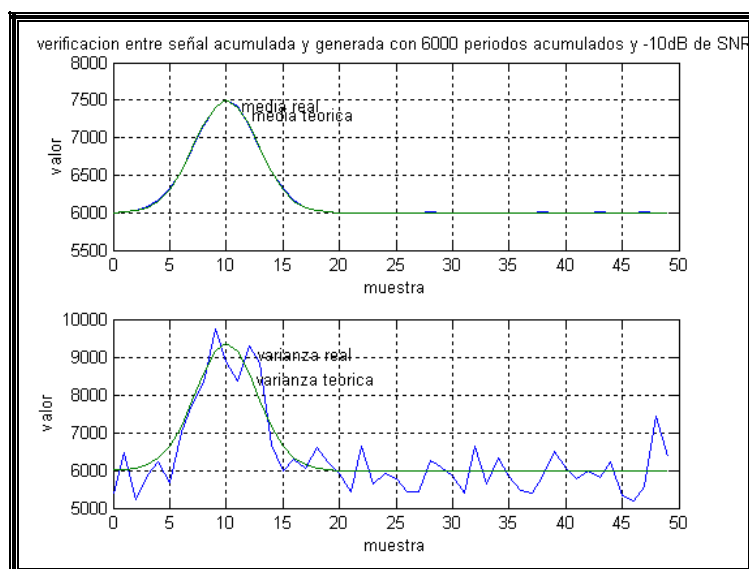


Ilustración 7.17: Comparación media y varianza teórica (verde) y real (azul) para $N_I=6000$

Una vez hemos comprobado que efectivamente la señal acumulada se comporta como una señal gaussiana para N_l grande y que las estadísticas teóricas se ajustan aproximadamente a las reales ya podemos generar la señal acumulada directamente. De esta manera el programa que estima la fase se llamará 'sincronización_generada' (ver Anexo B), ya que ahora en vez de generar la señal y acumularla la genera directamente.

Comprobamos que generamos la señal correctamente. Primero a través de la función 'qqplot' comprobamos que la señal acumulada y la generada tienen la misma estadística. La función 'qqplot' realiza un gráfico de las dos señales de tal manera que si tienen la misma distribución el gráfico será lineal, como muestra la Ilustración 7.18 que sirve de ejemplo.

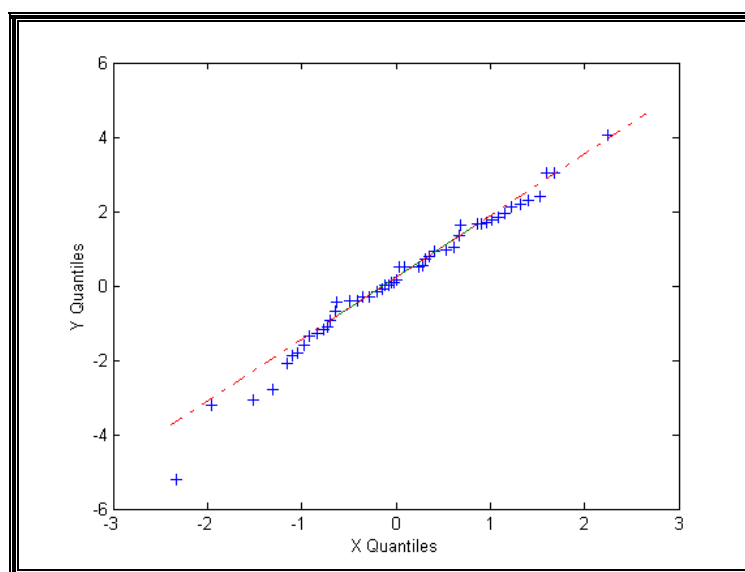


Ilustración 7.18: Ejemplo qqplot para dos señales con la misma distribución.

La Ilustración 7.19, Ilustración 7.20, Ilustración 7.21 y Ilustración 7.22 muestran como conforme aumenta el número de periodos acumulados las estadísticas de la señal acumulada y generada se aproximan cada vez más, ya que cada vez el gráfico se acerca más a una recta. Estas ilustraciones se han realizado a partir del programa llamado ‘verificacion_generada’ (ver Anexo B), el cual utiliza la función ‘qqplot’.

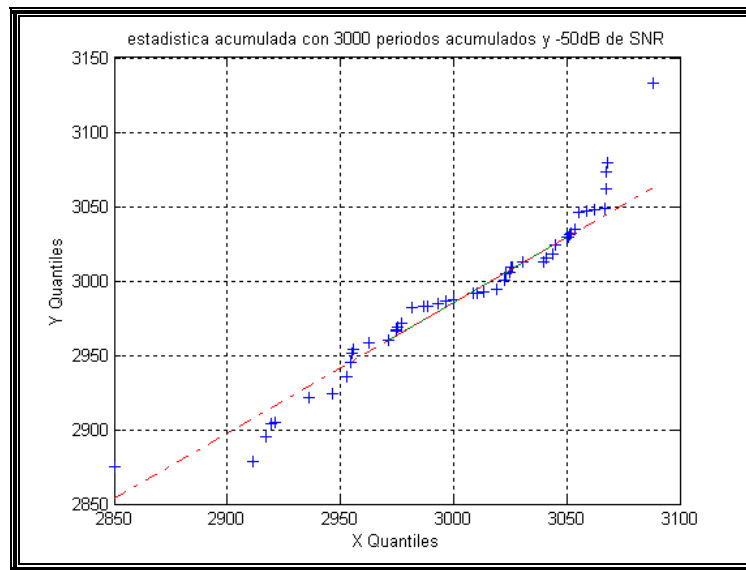


Ilustración 7.19: QQplot de la señal acumulada versus la señal generada para $N_1=3000$.

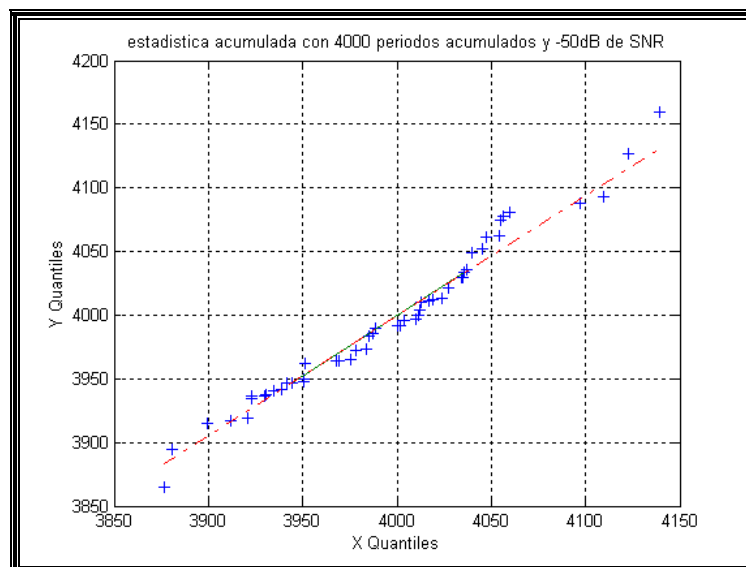


Ilustración 7.20: QQplot de la señal acumulada versus la señal generada para $N_1 = 4000$

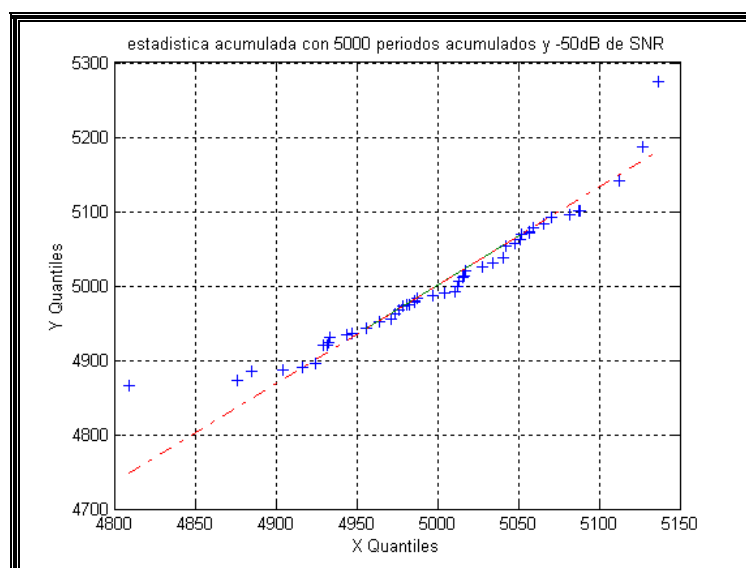


Ilustración 7.21: QQplot de la señal acumulada versus la señal generada para $N_1 = 5000$

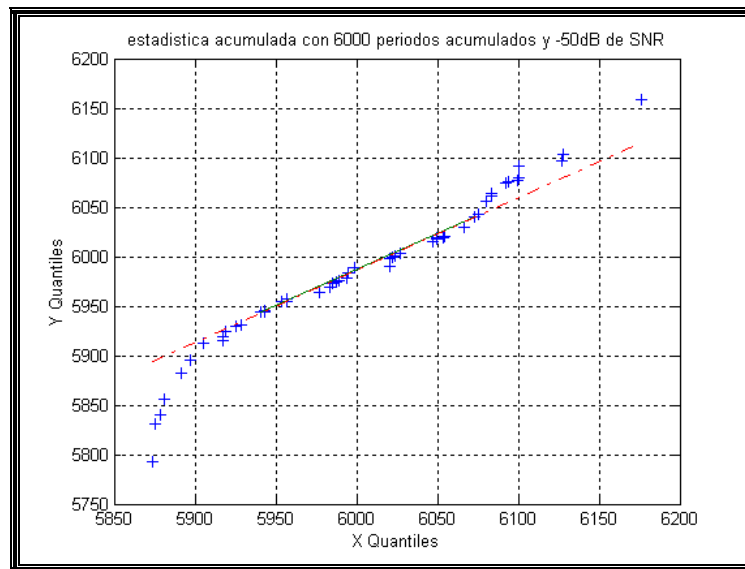


Ilustración 7.22: QQplot de la señal acumulada versus la señal generada para $N_1=6000$.

De esta forma queda comprobado que la señal generada acumulando todos los periodos y la señal generada a partir de las estadísticas calculadas son ambas gaussianas y con las mismas características.

La función 'verificacion' (ver Anexo B) permite comprobar gráficamente que forma tienen ambas señales, la acumulada y la generada. La Ilustración 7.23, Ilustración 7.24 e Ilustración 7.25 se han obtenido mediante esta función. En la Ilustración 7.23 e Ilustración 7.24 se puede observar claramente la gran semejanza entre ellas, la cual aumenta cuando aumenta el número de periodos acumulados. En la Ilustración 7.25 observamos como el perfil del pulsar es enmascarado por el ruido para ambas señales cuando aumenta la SNR.

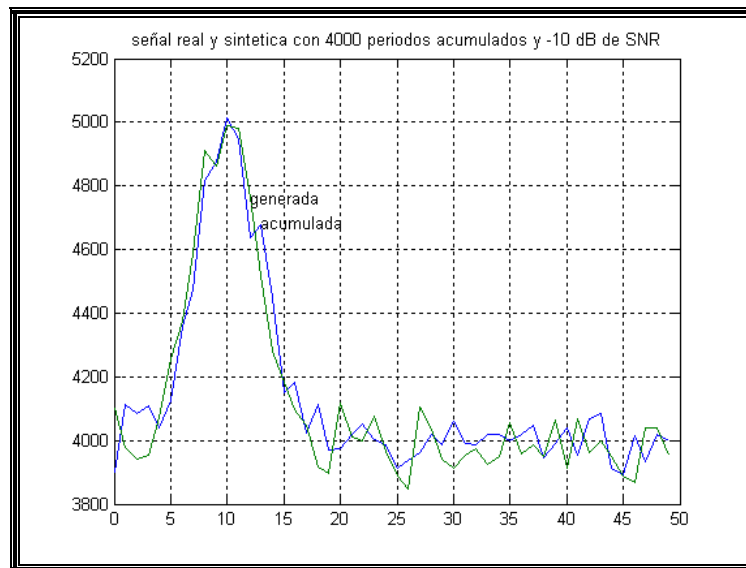


Ilustración 7.23: Similitud entre señal acumulada (azul) y generada (verde) para $N_i = 4000$ y $\text{SNR} = -10\text{dB}$.

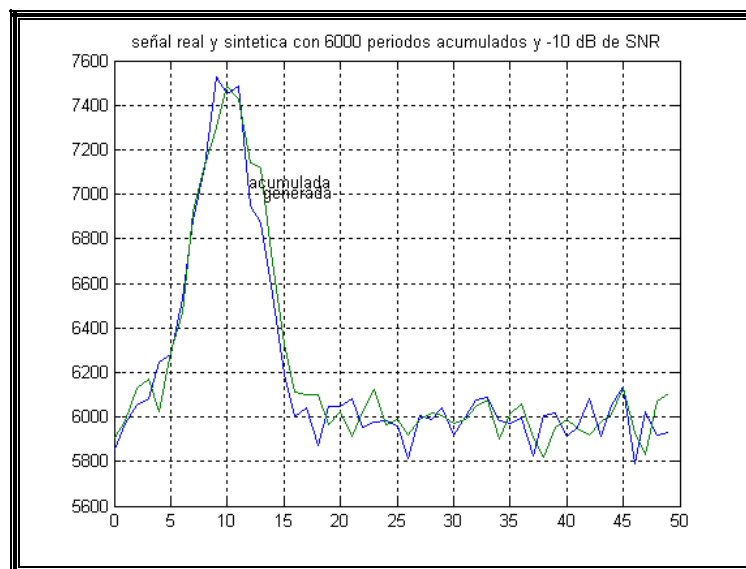


Ilustración 7.24: Similitud entre señal acumulada (azul) y generada (verde) para $N_i = 6000$ y $\text{SNR} = -10\text{dB}$.

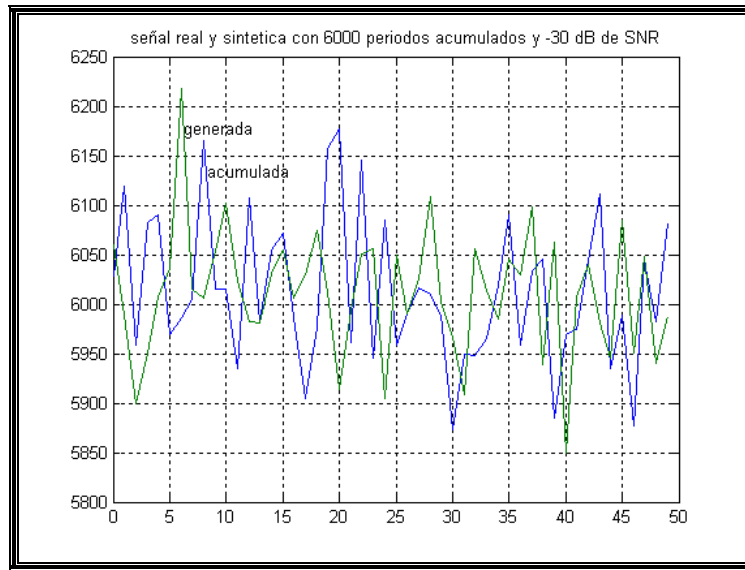


Ilustración 7.25: Similitud entre señal acumulada (azul) y generada (verde) para $N_i = 4000$ y $\text{SNR} = -30\text{dB}$.

7.3 SIMULACIONES OBTENIDAS

Una vez comprobado que las características de la señal original se mantienen haciendo uso de los métodos semianalíticos, utilizamos esta segunda versión del programa, que nos permite simulaciones mucho más rápidas, para obtener el sesgo del estimador y la covarianza del error.

7.3.1.1 Sesgo del estimador

Como se vio en el capítulo 5, el sesgo de un estimador se define como:

$$b_{\theta} = E(\hat{\theta}) - \theta \quad \text{Ecuación 7.17}$$

Es decir, que cuando la esperanza del estimador tiende a la variable estimada, se dice que el estimador es insesgado. La función que calcula el sesgo es llamada 'calcula_sesgo' (ver Anexo B) que junto con la función 'grafica_sesgo' (ver Anexo B) nos permiten obtener el gráfico siguiente.

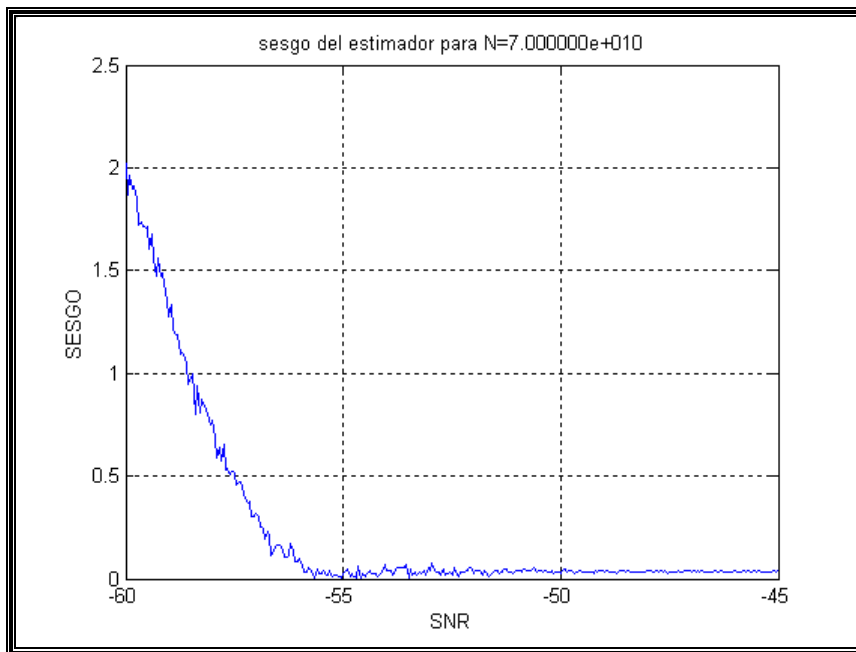


Ilustración 7.26: Sesgo del estimador utilizando la señal generada para $N_i=7.10^{10}$ y el calculo realizado sobre 50.000 realizaciones

Como se puede observar en la Ilustración 7.26 para 7.10^{10} periodos de integración el sesgo del estimador para SNRs mayores de alrededor de -55dB es cero, se puede considerar esta SNR como umbral dado este número de periodos de integración. Por lo tanto, se obtiene que el estimador será válido para SNRs por encima de -55dB.

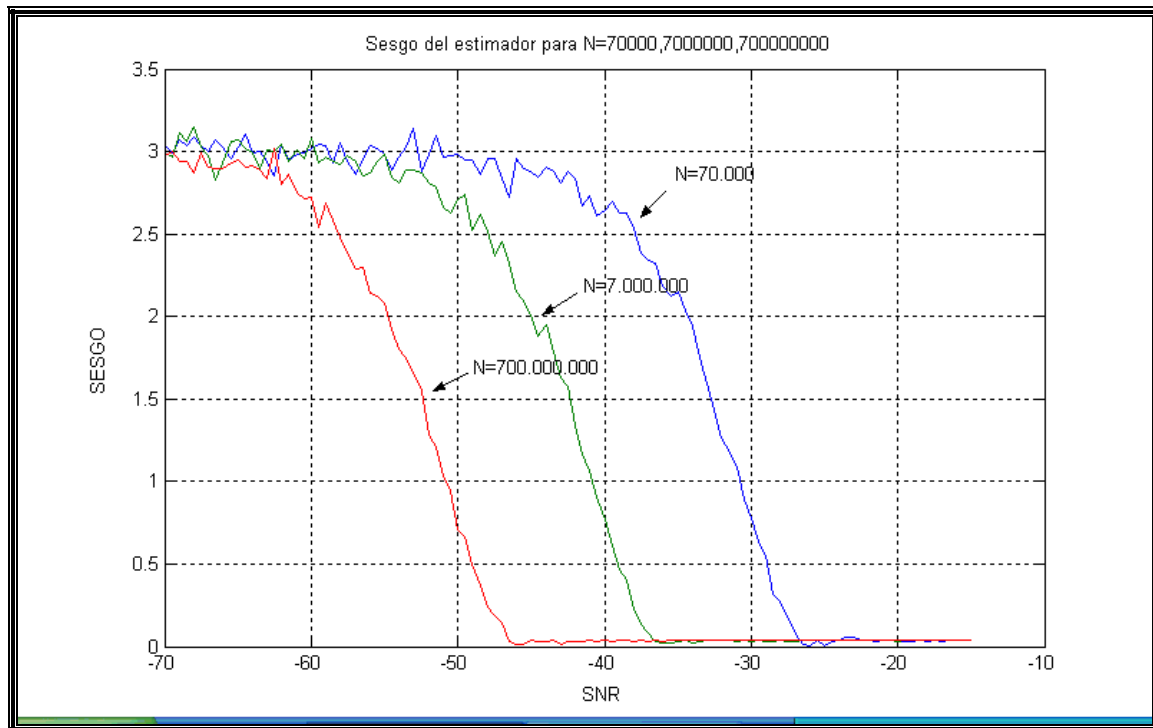


Ilustración 7.27: Sesgo del estimador para diferentes valores del número de periodos de integración (azul $N_I = 70.000$, verde $N_I = 7.000.000$ y rojo $N_I = 700.000.000$).

En la Ilustración 7.27 se puede observar como varía el sesgo del estimador en función del número de periodos de integración y de la SNR. El sesgo va disminuyendo conforme el número de periodos acumulados va aumentando. Además la SNR umbral también disminuye así como el momento en que el estimador entra en saturación.

Es decir, que a mayor número de periodos acumulados, menor será la SNR umbral y mayor será la región en que el estimador es insesgado. Así mismo menor será la SNR en la que el estimador se satura. Este gráfico se ha generado gracias al programa llamado 'grafica_sesgo_multiple' (ver Anexo B).

7.3.1.2 Covarianza del error

Como se vio en el capítulo 5, la varianza del estimador o lo que es lo mismo la covarianza del error es:

$$\sigma_{\theta}^2 = E \left| \hat{\theta} - \theta \right|^2 \quad \text{Ecuación 7.18}$$

La función que calcula la varianza del estimador es la función 'calcula_varianza' (ver Anexo B) que junto con la función 'gráfica_varianza' (ver Anexo B) permiten obtener los siguientes gráficos.

En la Ilustración 7.28 se puede observar la varianza del error del estimador para $N_1 = 7 \cdot 10^{10}$. A partir de $\text{SNR} = -30$ dB la varianza es de 10^{-3} por lo que se puede considerar esta SNR como umbral. Cuando la SNR es menor de -30dB la varianza deja de ser constante para aumentar de forma proporcional al aumento de la SNR.

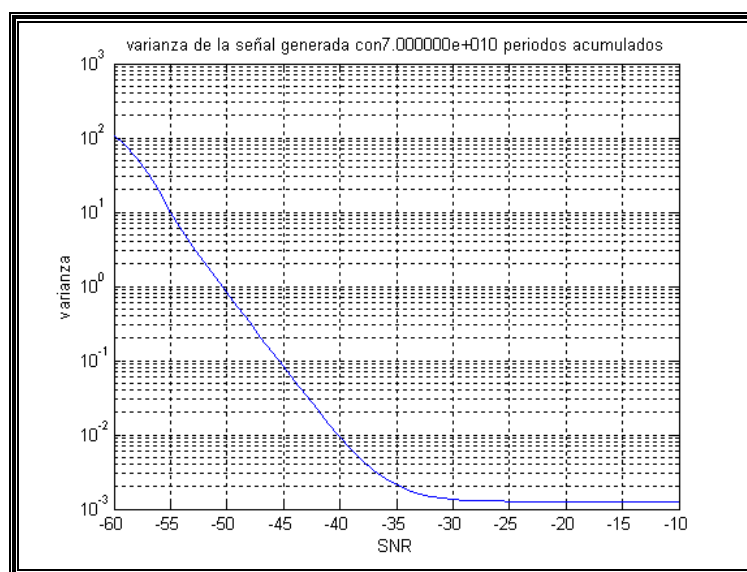


Ilustración 7.28: Varianza del estimador para $N_1=7 \cdot 10^{10}$ y sobre 10.000 realizaciones

En la siguiente ilustración, generada gracias a la función 'grafica_varianza_multiple' (ver Anexo 2), se puede observar como varía la varianza del error del estimador en función de la SNR para diferentes valores de periodos de integración.

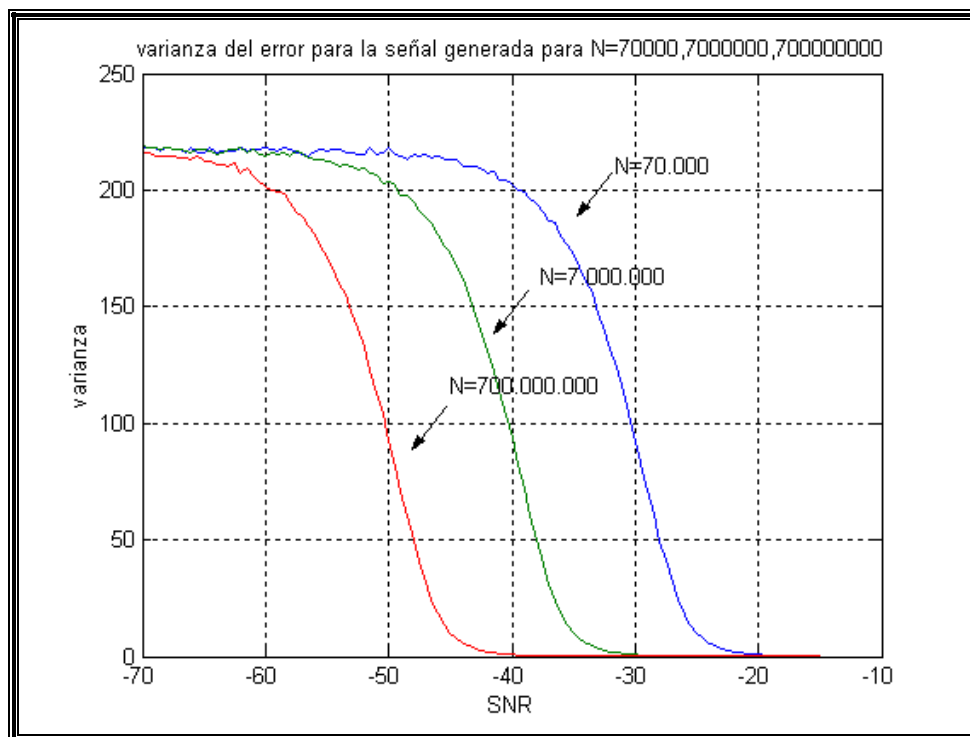


Ilustración 7.29: Varianza del error en función de SNR y N_i

En él se puede apreciar como las hipótesis teóricas se verifican:

- El umbral aparece a la misma varianza del error temporal en todos los casos, lo que constituye la verificación experimental de las ecuaciones del umbral teóricas. Se puede observar como el error temporal aumenta escaladamente por debajo del SNR umbral. Además conforme el número de periodos de integración aumenta, la SNR a la que se alcanza el umbral disminuye.

- El suelo es alcanzado para SNR altas para una longitud de integración finita, por lo tanto, a las SNR habituales, el estimador no trabajará en esta zona. También conforme el número de periodos de integración es mayor, la SNR a partir de la que se parte del suelo disminuye.
- La región de operación de las ecuaciones derivadas está contenida entre el suelo de alta SNR y el umbral de baja SNR.
- A muy baja SNR, la varianza temporal se satura hasta su valor a priori.

8 CONCLUSIONES

En la actualidad, los sistemas de posicionamiento basados en sistemas terrestres son insuficientes para las cada vez más frecuentes misiones espaciales que se llevan a cabo lejos de la Tierra.

Las estrellas de neutrones llamadas púlsares son aptas para este tipo de sistemas debido a que son fuentes únicas, extremadamente estables, periódicas y que además se encuentran repartidas a lo largo de la galaxia. Se han llevado a cabo diferentes estudios para la utilización de estas estrellas en las diferentes bandas de frecuencia pero en todas ellas todavía quedan limitaciones por superar y se sigue su investigación.

Siguiendo esta línea, hemos llevado a cabo un estudio de viabilidad sobre el uso de los púlsares en la banda de radio, centrándonos únicamente en la parte de procesamiento de señal utilizado en la etapa de estimación temporal, siguiendo el sistema de navegación definido por jerarquías.

A partir del estudio “Feasibility Study for a Spacecraft Navigation System relying on Pulsar Timing Information” [4], se realizó una validación independiente de los resultados teóricos obtenidos en éste, calculando las propiedades estadísticas del estimador temporal a través de simulaciones obtenidas en MATLAB.

Los púlsares son estrellas de neutrones que giran emitiendo señales de radio pulsadas a la frecuencia de rotación. Aunque estos pulsos individuales son muy variables (intensidad, dirección, forma del pulso), superponiendo centenares de pulsos registrados, se obtiene el perfil integrado del pulso, el cual es normalmente estable y característico para cada púlsar. El periodo de rotación también puede sufrir variaciones aunque son tan pequeñas que su estabilidad llega a ser comparable a la de los relojes atómicos.

Sin embargo, para obtener datos precisos de los púlsares, se han de superar diferentes obstáculos técnicos como la dispersión de la señal recibida y tiempos de integración elevados para conseguir una SNR satisfactoria, debido a que los pulsos recibidos son débiles. Como a su vez las antenas no pueden ser grandes, ya que el sistema de recepción se supone establecido en una nave espacial, se toma como referencia una SNR de -50dB .

El primer paso fue obtener un modelo de señal para caracterizar las emisiones del púlsar. Sin embargo no se dispone de la información experimental completa para caracterizar las estadísticas de segundo orden ya que únicamente se tiene información sobre el perfil medio de potencia y sobre su tasa de densidad de potencia espectral media. La aproximación realizada para la estimación temporal consiste en modelar las matrices correlación como matrices diagonales. Esto es razonable si el ancho de banda examinado es suficientemente estrecho para garantizar que la densidad espectral de potencia es constante aproximadamente. Bajo estas condiciones, la matriz correlación $R_x[n]$ y sus matrices de coeficientes espectrales $R_a[l_2]$ pasan a ser diagonales cuando consideramos un subcanal de banda estrecha de la señal púlsar. En particular, los coeficientes diagonales de $R_x[n]$ corresponden a muestras correlativas del perfil de potencia media $\sigma_p^2(t)$. [4]

Respecto al ruido, se asume que el ruido del sistema es blanco y que por lo tanto, su matriz de correlación es diagonal. [4]

Como método para la estimación se ha optado por el de máxima verosimilitud debido a que es, de manera aproximada, el estimador insesgado de varianza mínima cuando el número de muestras es grande.

Los algoritmos de la estimación han sido presentados en los capítulos previos así como sus desarrollos y simulaciones. Los resultado teóricos aplican en un régimen de baja SNR (con antenas pequeñas), donde el ruido aditivo gaussiano afecta a la recepción del pulsar, siendo el factor de degradación dominante. En esta región de operación se requiere de la integración de muchos periodos del pulso antes de la estimación temporal fiable para que la duración del pulso pueda ser obtenida.

Sin embargo, la limitación real encontrada de los sistemas de localización basados en pulsares ha sido la instrumentación requerida. Muy pocos radio pulsares tienen una relación señal-ruido suficientemente alta para que una pequeña antena pueda proveer tiempos de integración razonables (pocos minutos) bajo las mejores condiciones posibles, aunque estos bastarían para proveer estimaciones de posición. [4]

Un límite a la varianza de las estimaciones ML es el Crámer-Rao Lower Bound (CRLB). Para una longitud de datos recogidos fija, y cuando la relación señal a ruido (SNR) decrece, la varianza de las estimaciones se aparta del comportamiento predicho por el CRLB (efecto umbral). Considerando el pulsar como gaussiano con estadísticas cíclicas o no, ambos CRLB coinciden (asintóticamente para L grandes) incluso si no asumimos ruido blanco se llega a la misma conclusión. Así que se pueden utilizar ambos indistintamente. [4]

Cuando consideramos el comportamiento del error temporal del algoritmo ML con respecto al previsto por el CRLB, observamos diferentes zonas de funcionamiento: de saturación, subumbral y de CRLB. La región de saturación del error a priori y el suelo de alta SNR determinan el rango operativo del algoritmo ML. Al umbral bajo, la realización real parte desde el CRLB de SNR bajo y aumenta hasta alcanzar la saturación. La región operativa de CRLB de baja SNR es válida sobre el umbral y antes de que el efecto del suelo empiece a ser importante a alta SNR.

Teniendo en cuenta las SNR habituales para una antena de área efectiva $A_e=10$ metros cuadrados, los algoritmos de estimación temporal nunca operarán en la región del suelo (alta SNR). [4]

Para corroborar todas estas conclusiones teóricas de forma independiente se llevó a cabo la simulación de la estimación. Ésta se realizó en dos pasos, en el primer paso se generaba la señal recibida del pulsar añadiendo a ésta el ruido, en el segundo paso se simulaba la estimación del retardo. Debido al tiempo excesivo de ejecución se decidió utilizar técnicas semianalíticas para agilizar la simulación. Así partiendo de la suposición de que el sistema es lineal, la idea general es separar el problema en dos partes, en un lado la generación de la señal sin ruido (la parte de la simulación) y en el otro con la contribución del ruido a la señal muestreada (parte analítica). Conceptualmente, el proceso consiste en reemplazar las fuentes de ruido actuales por una fuente de ruido “equivalente” antes del dispositivo de decisión.

Así se obtienen dos partes. La primera parte consta de la generación de la señal. Para ello, utilizando el teorema del límite central y comprobando con la función qqplot, se obtiene que la señal generada es así misma para N grandes gaussiana. Y que por tanto podemos generarla conociendo su media y su varianza. Una vez conocido estos parámetros comprobamos que la función generada y la real tienen el mismo comportamiento. Así mismo también comprobamos que junto con el ruido siguen manteniendo el mismo comportamiento que la señal real. Esta semejanza aumenta conforme aumenta el número de periodos acumulados.

Una vez comprobado que las técnicas semianalíticas son válidas en estas condiciones se obtuvo el sesgo y la varianza del estimador. A partir de estos gráficos se confirma que el comportamiento del estimador era el que se mostraba en el estudio teórico. Se pueden apreciar las tres zonas de funcionamiento: saturación, subumbral y de CRLB.

También se verifica, que teniendo en cuenta las SNR habituales los algoritmos de estimación temporal nunca operarían en la región del suelo (alta SNR).

Además se valida que conforme el número de periodos aumenta, la SNR umbral disminuye y así mismo la SNR a la que el estimador entra en la zona de saturación. Y que por tanto la región operativa se desplaza hacia bajas SNR.

Los resultados teóricos quedan de esta forma verificados a través de una validación independiente.

9 PERSPECTIVAS FUTURAS

Únicamente en lo que a procesamiento de señal se refiere, la posibilidad de usar pulsares para un sistema de autoposicionamiento espacial ha sido validada. Los resultados obtenidos aplican en un régimen de baja SNR (debido al uso de antenas pequeñas), donde el ruido Gausiano que afecta a la recepción del pulsar, es el factor de degradación dominante. En esta región de operación se entiende que se requiere de la integración previa de muchos periodos de pulso para que se pueda obtener una estimación temporal fiable de la duración del pulso.

Sin embargo, la limitación real de un sistema de posicionamiento basado en pulsares que se ha encontrado hasta el momento es la instrumentación. Muy pocos pulsares tienen una relación señal-ruido suficientemente alta como que una antena pequeña pueda proveer tiempos de integración razonables (pocos minutos) bajo las mejores condiciones posibles, aunque bastan para conseguir estimaciones posicionales.

Los resultados que aquí se presentan han sido obtenidos para una antena de 10 metros cuadrados, asumiendo la perfecta cancelación del ruido en la frecuencia de radio proveniente del Sol y/o planetas cercanos, un modelo constante de velocidad durante el tiempo de integración, un apuntamiento perfecto de la antena y observación simultanea de los pulsares procesados. El esfuerzo tecnológico no solo aplica a la antena si no también al ancho de banda de la señal. Se ha mostrado que el aumento del ancho de banda del receptor permite obtener mejor precisión posicional.

Es posible considerar unas restricciones tecnológicas más relajadas que las de este estudio (antenas más pequeñas, observaciones secuenciales más que simultaneas de diferentes pulsares, anchos de banda más pequeños en recepción, consideración de márgenes de implementación de pérdida y seguridad) a expensa de tiempos de integración mucho más largos, resultado de señales de pulsares muy débiles.

Una reducción del área de la antena tiene que ser compensado con un incremento en el ancho de banda de integración. Se cree que para reducir el tamaño de la antena, el modelo de velocidad constante puede fallar. Sería requerido un tiempo de integración de muchas horas para extraer el más mínimo pulsar milisecundario del ruido, quizá imponiendo limitaciones en la suavidad de la trayectoria. En particular, el impacto tecnológico más grande es entre la observación simultanea o secuencial de pulsares. La primera requiere de tantas antenas como pulsares observados pero provee de la evolución más rápida entre precisión posicional y tiempo. La segunda aumentaría más la latencia, el mínimo tiempo antes de que se produzca una estimación de la posición (probablemente por un factor igual al mínimo número de pulsares requeridos), así como la ambigüedad de los algoritmos de resolución. La suavidad de la trayectoria del vehículo espacial también se cree ser más crítico en el caso de la observación secuencial.

El estudio de los pulsares en Rayos X predice tiempos de integración más largos ya que han sido reportadas tasas de llegada del orden de solo 90 fotones por hora para los pulsares de rayos X disponibles, produciendo así más de un día de integración (tomando el detector ROSAT como punto de partida). Además el número de pulsares de rayos X disponibles que se han encontrado es mucho menor que el de radio pulsares. [4]

En resumen: Aunque el posicionamiento basado en pulsares ha sido mostrado como teóricamente posible, aspectos como la complejidad y la latencia¹ en la obtención de las estimaciones posicionales no lo hacen viable para ser usados en pequeños vehículos espaciales con el fin de obtener posicionamiento autónomo rápido. Mejor dicho, como sistema de posicionamiento aparece más apropiado para grandes naves o estaciones HUB que para vehículos más pequeños.

¹ Como período de aparente inactividad. [13]

10 ANEXO A. ESTIMACIÓN DEL PERIODO RECIBIDO (PATD)

10.1 Introducción. Cuantificación del efecto Doppler

La velocidad de las naves espaciales introduce un efecto Doppler el cual cambia el PRP¹ observado. Periodo a periodo, la integración se verá afectada por la variación del pulso recibido de la señal púlsar o PATD (Pulse Arrival Time Drift) cuando el periodo promedio no coincide con el periodo real, produciéndose la degradación. Así pues, el PRP del púlsar debe ser conocido con alta precisión y la estimación del PATD debe ser considerada. Como ejemplo, vamos a considerar que una nave espacial está viajando a una velocidad v , y que calculamos la variación en tiempo (drift-time: Δt), normalizándolo a la duración del púlsar cuando llega al 10% de intensidad de pico T_{10} , durante una observación de duración T_0 :

$$\frac{\Delta t}{T_{10}} = \frac{v}{c} \frac{1}{T} \frac{T_0}{T_{10}} \quad \text{Ecuación 10.1}$$

Para el púlsar milisegundario B1937+21, una velocidad de 50.000 Km/h en la dirección del púlsar y un minuto de observación, obtenemos un valor de $13.95T_{10}$ unidades de tiempo. Es decir, que debido al efecto Doppler el pulso que nosotros observamos es 14 veces mayor que el teórico. [4]

¹ PRP: periodo de repetición del pulso

10.2 Deducción de la métrica

Como se ha visto anteriormente, sabemos que la métrica a maximizar es del tipo:

$$Z(x | \tau_s, \delta_T) = \underline{x^H} \cdot \underline{\underline{R_n^{-1}}} \cdot \underline{\underline{R_p(\tau_s, \delta_T)}} \cdot \underline{\underline{R_n^{-1}}} \cdot \underline{x} \quad \text{Ecuación 10.2}$$

Que se puede expresar como:

$$Z(x | \tau_s, \delta_T) = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 \frac{1}{\sigma_n^4} \sigma_p^2(k) \quad \text{Ecuación 10.3}$$

Si lo miramos desde el punto de vista analógico tenemos que el perfil del púlsar se puede expresar como:

$$\sigma_p^2(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m \cdot e^{j2\pi \frac{m}{N_T} t} \quad \text{Ecuación 10.4}$$

Si cogemos únicamente los armónicos más significativos, lo expresaríamos como:

$$\sigma_p^2(t) = \sum_{m=-M}^M S_m \cdot e^{j2\pi \frac{m}{N_T} t} \quad \text{Ecuación 10.5}$$

Teniendo en cuenta que δ es la variación de la frecuencia recibida (f_p) respecto la nominal del púlsar (f_{p0}):

$$f_p = f_{p0} + \delta \quad \text{Ecuación 10.6}$$

Se puede expresar el perfil del púlsar recibido en analógico como:

$$\sigma_p^2(t) \approx \sum_{m=-M}^M S_m \cdot e^{j2\pi m f_p t} = \sum_{m=-M}^M S_m \cdot e^{j2\pi m (f_{p0} + \delta) t} \quad \text{Ecuación 10.7}$$

Si se mira desde el punto de vista digital, tomando para ello una muestra cada T_s , de tal manera que $t = q \cdot T_s$ y se obtiene la siguiente expresión del perfil del púlsar recibido:

$$\sigma_p^2(q \cdot T_s) \approx \sum_{m=-M}^M S_m \cdot e^{j2\pi m (f_{p0} + \delta)(qT_s + \tau)} \quad \text{Ecuación 10.8}$$

donde τ es el desfase con la señal púlsar recibida.

A partir de esta expresión resulta la métrica como:

$$Z(x | \tau_s, \delta_T) = \sum_{q=0}^{N-1} |x_q|^2 \frac{1}{\sigma_n^4} \sum_{m=-M}^M S_m \cdot e^{j2\pi m (f_{p0} + \delta)(qT_s + \tau)} \quad \text{Ecuación 10.9}$$

Si se agrupa:

$$Z(x | \tau, \delta) = \frac{1}{\sigma_n^4} \sum_{m=-M}^M S_m \cdot e^{j2\pi m (f_{p0} + \delta)\tau} \sum_{q=0}^{N-1} |x_q|^2 e^{j2\pi m (f_{p0} + \delta)qT_s} \quad \text{Ecuación 10.10}$$

De tal forma que el segundo sumatorio corresponde a la FFT del módulo al cuadrado de la señal recibida evaluada en la frecuencia recibida $f_p = f_{p0} + \delta$. Si se toma como frecuencia normalizada $\bar{f} = (f_{p0} + \delta) \cdot T_s$ y por tanto $\bar{\delta} = \delta \cdot T_s$, se consigue:

$$Z(x | \tau, \delta) = \frac{1}{\sigma_n^4} \sum_{m=-M}^M S_m \cdot e^{j2\pi m (f_{p0} + \delta)\tau} FFT |x|^2_{\vartheta = f_{p0}T_s + \bar{\delta}} \quad \text{Ecuación 10.11}$$

Una vez obtenida la métrica, el objetivo es conseguir una estimación de $\bar{\delta}$. Para lograrlo se utilizará el 'maximal ratio combining' de los armónicos que se basa en la desigualdad de Schwartz. Esta desigualdad proporciona la cota máxima del producto escalar de dos vectores complejos. [4]

10.2.1 Desigualdad de Schwartz

Dado un K-espacio vectorial V con producto interno la desigualdad de Cauchy-Schwarz dice que para todo $u, v \in V$ la norma de su producto interno será más pequeño o igual que el producto de sus normas:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{Ecuación 10.12}$$

definida la norma para un $v \in V$ como:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \text{Ecuación 10.13}$$

La igualdad sólo se cumple si $\{u, v\}$ son linealmente dependientes.

En el caso particular de $V = \mathbb{C}^n$ la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtienen las siguientes relaciones:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i^* \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{Ecuación 10.14}$$

definida la norma como:

$$\|(a_1, a_2, \dots, a_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \quad \text{Ecuación 10.15}$$

O lo que es lo mismo:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i^* \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |b_i|^2 \quad \text{Ecuación 10.16}$$

La igualdad se consigue cuando $a=k \cdot b$ siendo k una constante, es decir, cuando uno de los vectores es linealmente dependiente del otro. [20] [32]

10.2.2 Aplicación de la desigualdad de Schwartz a la métrica

Si se aplica la desigualdad de Schwartz a la métrica, se obtiene el valor máximo cuando:

$$S_m^* = k \cdot e^{j2\pi m(f_{p0} + \delta)\tau} \cdot FFT \left| x \right|_{\vartheta=f_{p0}T_s + \bar{\delta}}^2 \quad \text{Ecuación 10.17}$$

siendo k una constante. Por tanto, si se substituye, resulta que la métrica será máxima con valor [4]:

$$Z(x | \tau, \delta) = \frac{1}{\sigma_n^4} \sum_{m=-M}^M \left| FFT \left| x \right|_{\vartheta=f_{p0}T_s + \bar{\delta}}^2 \right|^2 \quad \text{Ecuación 10.18}$$

10.3 Estimación simultánea del retardo y de la frecuencia recibida

Se puede obtener el mismo resultado partiendo de la métrica obtenida en el capítulo 6. Para ello se formula el algoritmo ML haciendo que el modelo de correlación del pulsar dependa del PATD, así que $R_p(\tau', \delta\tau')$ estará incluida en la métrica.

El modelo para A es expresado como:

$$\begin{aligned}
 A_{n_1 N_T - n_1 \delta_T}(\tau_s) &= \sum_{k=0}^{N_T-1} R_A[k] e^{j2\pi \frac{k}{N_T} (n_1 N_T - n_1 \delta_T - \tau_s)} = \\
 &= \sum_{k=0}^{N_T-1} R_A[k] e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \frac{n_1}{\delta_T}} e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s}
 \end{aligned}
 \quad \text{Ecuación 10.19}$$

con δ_T un valor pequeño para tener en cuenta el PATD. Entonces, al sustituir en las ecuaciones de la métrica obtenemos:

$$\begin{aligned}
 Z(x | \tau_s, \delta_T) &= \sum_{n_1=0}^{N_T-1} x_{n_1 N_T}^H \left(\sum_{k=0}^{N_T-1} R_A[k] e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \frac{n_1}{\delta_T}} e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s} \right) x_{n_1 N_T} \\
 &= \sum_{k=0}^{N_T-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s} \sum_{n_1=0}^{N_T-1} x_{n_1 N_T}^H R_A[k] x_{n_1 N_T} e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \frac{n_1}{\delta_T}} = \\
 &= \sum_{k=0}^{N_T-1} y_k(\delta_T) e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s}
 \end{aligned}
 \quad \text{Ecuación 10.20}$$

$$y_k(\delta_T) = \sum_{n_1=0}^{N_T-1} (x_{n_1 N_T}^H R_A[k] x_{n_1 N_T}) e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \frac{n_1}{\delta_T}}
 \quad \text{Ecuación 10.21}$$

Así pues, las diferentes hipótesis de δ_T necesitan ser seguidas, una búsqueda bidimensional sobre (Γ_s, δ_T) tiene que ser realizada. En el caso del ruido blanco, la expresión para $y_k(\delta_T)$ pasa a ser:

$$\begin{aligned}
 x_{n_1 N_T}^H R_A[k] x_{n_1 N_T} &= S[k] \sum_{i=0}^{N_T-1} |x(n_1 N_T - i)|^2 e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} i} \\
 y_k(\delta_T) &= S[k] \sum_{i=0}^{N_T-1} \left(\sum_{n_1=0}^{N_T-1} |x(n_1 N_T - i)|^2 e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \frac{n_1}{\delta_T}} \right) e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} i}
 \end{aligned}
 \quad \text{Ecuación 10.22}$$

Quedando la métrica a maximizar como:

$$Z(x|\tau_s, \delta_T) = \sum_{k=0}^{N_T-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s} \sum_{n_1=0}^{N_T-1} S[k] \sum_{i=0}^{N_T-1} |x(n_1 N_T - i)|^2 e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} i} e^{-j2\pi \frac{k}{N_T \delta_T} n_1} =$$

$$\sum_{k=0}^{N_T-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} \tau_s} S[k] \sum_{n_1=0}^{N_T-1} \sum_{i=0}^{N_T-1} |x(n_1 N_T - i)|^2 e^{-j2\pi \frac{k}{N_T} i} e^{-j2\pi \frac{k}{N_T \delta_T} n_1} \quad \text{Ecuación 10.23}$$

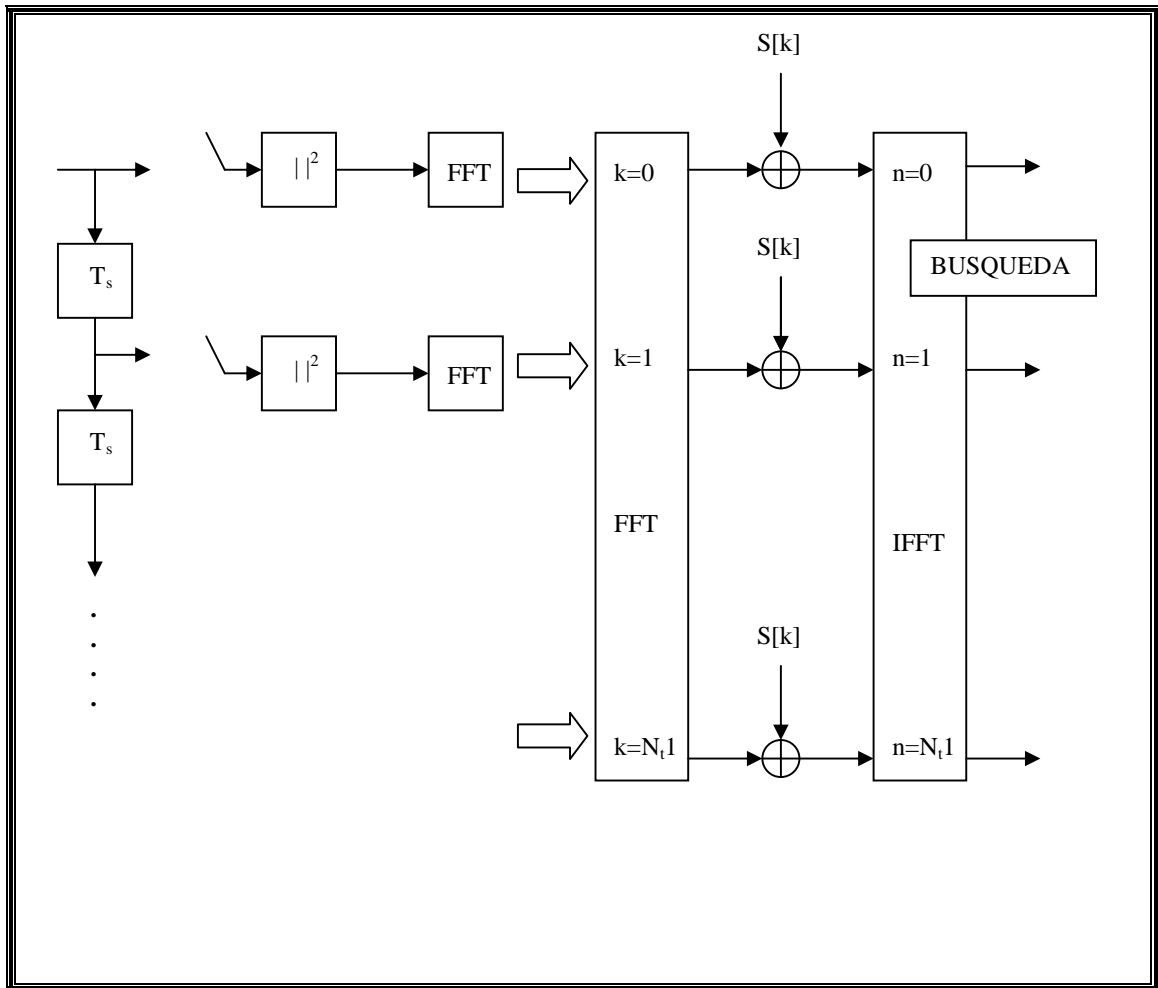


Ilustración 10.1: Estimación temporal de la fase y PATD. Los bloques de las FFT's en las ramas polifase no son completos, sólo las ramas más bajas son chequeadas dentro del rango del PATD. [4]

10.4 Funcionamiento de los algoritmos

Este proyecto se ha centrado en el desarrollo del algoritmo de estimación del retardo, este algoritmo parte del supuesto conocimiento del valor de la frecuencia con la que recibimos el pulsar. A modo de complemento, se ha desarrollado una versión del algoritmo de estimación del PATD, suponiendo que no necesita conocer el valor del retardo para estimar la frecuencia y que por tanto es un algoritmo independiente.

Suponiendo que los dos algoritmos trabajan de forma independiente uno del otro tenemos que conocido el desfase con que llega la señal la métrica a maximizar sería:

$$\hat{f}_0 = \max \sum_{k=1}^{\infty} |X[k \cdot f_0]|^2 \quad \text{Ecuación 10.24}$$

Siendo $X[f] = \sum_{n=0}^{N_P N_T - 1} |x[n]|^2 \cdot e^{-j2\pi f n}$ para $0 \leq f \leq 1$.

Por tanto el esquema de procesado sería el siguiente:

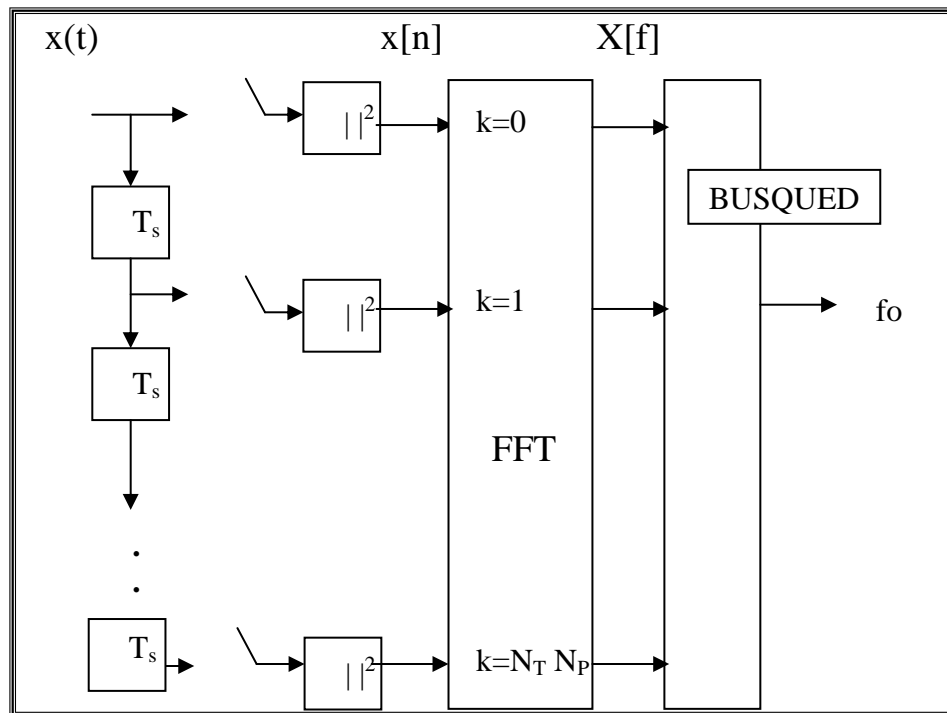


Ilustración 10.2: Esquema de procesado para el algoritmo de la estimación de la deriva. [4]

Como se verá a continuación la transformada de la señal recibida presenta armónicos significativos a la frecuencia de repetición del pulsar a pesar del nivel del ruido. Esto es debido a que dada una señal base $z_b(t)$ que se repite con un periodo P_0 , la señal periódica se puede expresar como:

$$x(t) = x_b(t) * \delta(t - nP_0) \quad \text{Ecuación 10.25}$$

Su transformada de Fourier tendrá la forma:

$$X(f) = X_b(f) \cdot \frac{1}{P_0} \sum_n \delta(f - \frac{n}{P_0}) = \frac{1}{P_0} \sum_n X_b(\frac{n}{P_0}) \cdot \delta(f - \frac{n}{P_0}) \quad \text{Ecuación 10.26}$$

Es decir, que la transformada de Fourier de la señal periódica es la transformada de la señal base evaluada en cada $\frac{n}{P_0}$, donde P_0 es el periodo de repetición. El algoritmo de estimación del PATD se basa en esta propiedad para encontrar la frecuencia a la que es recibida la señal debido al efecto Doppler.

Por ejemplo, si generamos una señal periódica cuyo periodo de repetición es igual a diez muestras ($T_p=10$) y cuya duración es una muestra ($T_d=1$) su transformada de Fourier para 10 periodos acumulados y una $SNR=100$ será:

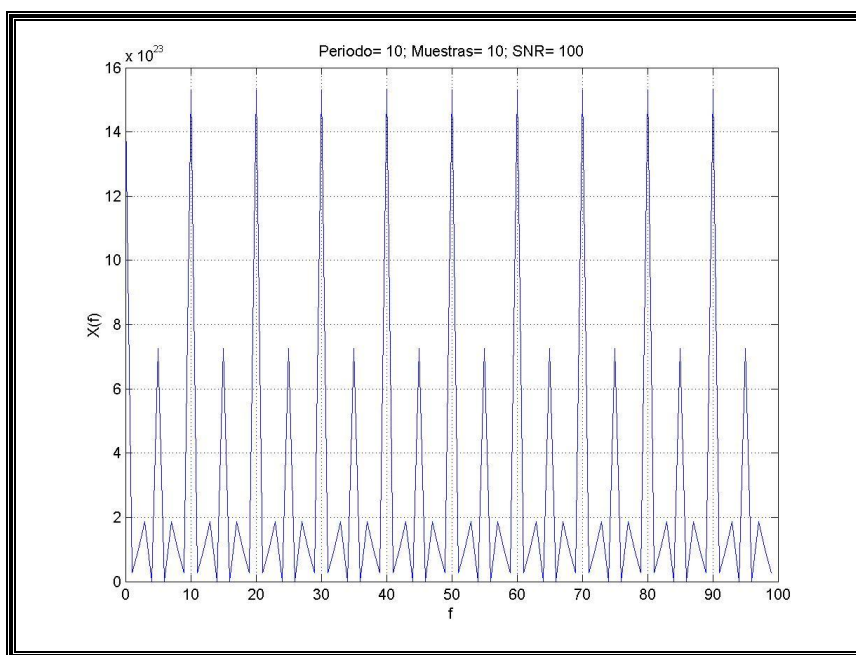


Ilustración 10.3: Transformada señal periódica ($SNR=100$).

Como se puede observar en la ilustración anterior la transformada de la señal periódica tiene armónicos a la frecuencia de repetición, en este caso $P_0=10$. Si disminuimos la SNR, aparecen otros picos debidos al aumento de ruido que por su propia naturaleza son aleatorios. Por tanto aquellos picos producidos por la frecuencia de repetición serán los únicos que mantendrán una relación.

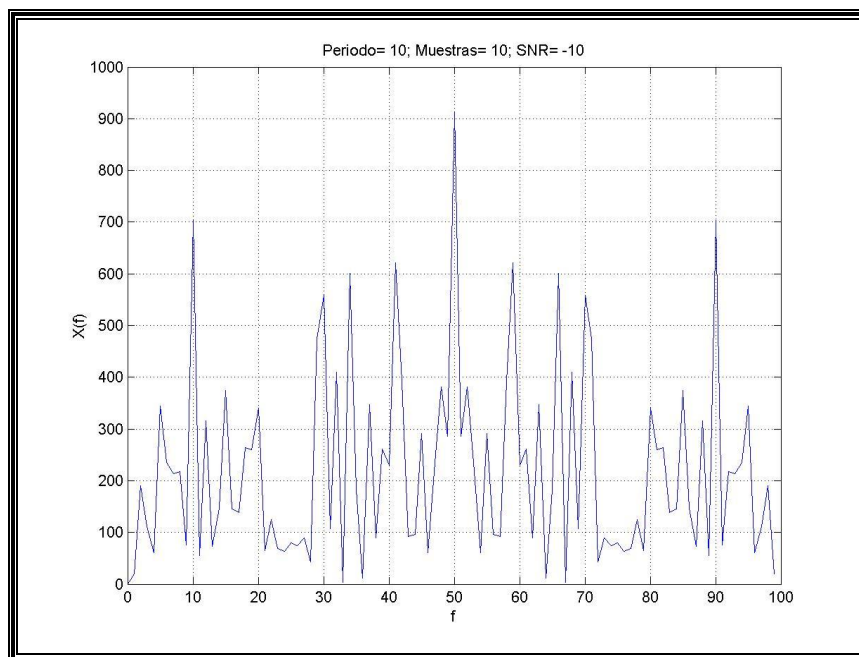


Ilustración 10.4: Transformada señal periódica (SNR=-10)

Si continuamos bajando la SNR, acercándonos a las condiciones a las que estará sometido el algoritmo, se obtiene que algunos armónicos quedan enmascarados por el ruido, pero aún así si sumamos todos los armónicos su proporción nos da la pista.

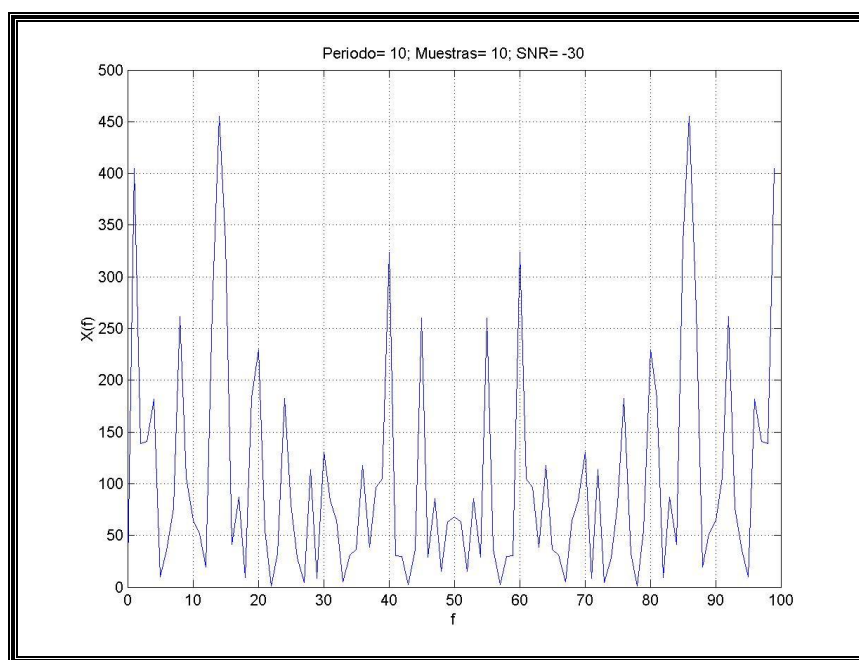


Ilustración 10.5: Transformada señal periódica (SNR=-30)

La FFT actúa como un banco de filtros, donde cada muestra es la salida de un canal del banco de filtros. El algoritmo lo que realiza es la búsqueda de la frecuencia que maximiza la métrica. Ésta será la frecuencia con la que recibimos la señal pulsar.

10.5 ESTIMACIÓN DEL PATD

Siguiendo el esquema deducido del algoritmo para la estimación de la deriva de la frecuencia de la señal pulsar recibida y teniendo en cuenta las características propias de la señal, como hemos hecho para el algoritmo de la estimación de la fase, simulamos la estadísticas del estimador a partir de un programa desarrollado en lenguaje MATLAB.

10.5.1 REALIZACIÓN DEL PROGRAMA

En este programa, como en los anteriores, hay dos partes principales que cabe diferenciar:

- La primera es la generación de la señal recibida, que está compuesta por la señal púlsar y por el ruido aditivo con sus respectivas características que se han intentado simular.
- La segunda es la realización de la estimación de los parámetros desconocidos siguiendo el esquema del algoritmo deducido anteriormente.

10.5.1.1 Generación de la señal recibida

La señal recibida está compuesta por la señal púlsar, la cual sufre una cierta deriva del periodo de repetición, y por el ruido aditivo. La señal púlsar recibida se genera prácticamente igual que en el programa 'sincronizacion_acumulada', se continua utilizando la función 'gen_perfil' para generar el perfil del púlsar pero ésta vez se utiliza el periodo al cual se le ha añadido la deriva ($T_p + dT = T_{patd}$). También se utiliza la función 'gen_recibida' pero esta vez el desfase es cero ya que se supone el desfase como conocido y por tanto el sistema está sincronizado con la señal púlsar ($T_r = 0$). Al igual que en 'sincronizacion_acumulada' se genera el ruido aditivo, se añade a la señal recibida y se calcula el módulo al cuadrado de cada una de las muestras recibidas.

10.5.1.2 Realización de la estimación

Siguiendo el esquema del algoritmo, el programa realiza una búsqueda de la frecuencia a la que se repiten los armónicos más significativos de la transformada del módulo de la señal recibida. Ésta será la estimación de la frecuencia recibida. Por tanto, primero realiza la transformada del módulo al cuadrado de cada una de las muestras obtenidas. Y segundo, prueba con diferentes frecuencias sistemáticamente hasta encontrar cuál de ellas es la que el valor de sus armónicos suma el máximo.

10.5.2 PROBLEMÁTICA DE BAJA SNR

Debido a la baja SNR, que provoca tiempos de integración considerablemente altos, las simulaciones de interés son largas y requerían de una gran capacidad computacional pero en este caso no ha sido posible aplicar los métodos semianalíticos. Por eso se ha optado por otras técnicas para intentar paliar este problema.

10.5.2.1 Optimización del código

Una de las técnicas adoptadas para disminuir el tiempo de ejecución, ha sido el de intentar realizar un código lo más eficiente posible. Para ello se han intentado evitar:

- Llamadas a funciones externas
- Llamadas a funciones dentro de los bucles
- Clears en línea
- Redefiniciones de tamaño
- Bucles

Por ejemplo, en la generación de la señal se ha evitado la llamada a subfunciones integrando el código de todas ellas (a excepción de la función de MATLAB 'gaussmf') a la función principal 'ESTIMACION_PATD'.

Con la intención de minimizar la llamada a funciones dentro del bucle, el ruido aditivo se calcula de ocho en ocho periodos para minimizar las llamadas a la función 'randn'. La elección de este número no es aleatoria ya que en las simulaciones el número de periodos de integración y el número de muestras por periodo que hemos utilizado han sido expresamente potencias de dos, para conseguir que el cálculo de la FFT fuera lo más rápido posible (como se explicará en el siguiente punto).

Este mismo criterio fue aplicado a la hora de elegir el método de almacenamiento de los datos generados como señal recibida. El problema en este caso es como almacenar la señal ya que el algoritmo la almacena suponiendo un periodo que es incorrecto. En este caso encontramos dos métodos similares. El primero consiste en almacenar los datos recibidos en una matriz conociendo el periodo recibido y luego trasponer esta matriz de tal forma que los datos queden almacenados suponiendo el periodo incorrecto. Otra forma es almacenar los datos en un vector y luego transformarlo a una matriz con el periodo incorrecto. Utilizando la función 'cputime' que MATLAB nos ofrece, hemos calculado cual de los dos métodos es el más eficiente. Para un mismo número de muestras, el segundo método tarda el doble que el primero. Así que este último es el más eficiente y por lo tanto el utilizado en la estimación.

10.5.2.2 FFT

Una de las grandes operaciones realizadas en la estimación es la transformada de Fourier del módulo al cuadrado de la señal recibida. En la práctica la transformada de Fourier se calcula con un algoritmo llamado *Fast Fourier Transform* o FFT. Este algoritmo es más eficiente cuando el número de muestras es potencia de 2. [38]

Por esta razón siempre se ha elegido los parámetros de tal forma que el número de muestras sea potencia de dos.

10.5.2.3 Zero-padding

También se ha intentado utilizar la técnica denominada Zero-padding, que consiste en añadir ceros al principio y/o final de la señal para extenderla antes de su transformada. De esta manera se obtiene más resolución frecuencial sin la necesidad de generar todas las muestras.

Según el teorema, para señales de banda limitada, hacer Zero Pad en el tiempo corresponde a la interpolación ideal en el dominio de la frecuencia.

A la vez manteniendo siempre la condición de que el número de muestras total sea múltiplo de 2, de esta manera se consigue:

- Mayor eficiencia en el algoritmo FFT.
- Efecto colateral de mejorar la eficiencia espectral.

[38]

10.5.2.4 Estimación eficiente

Todas estas estrategias han permitido un tiempo de simulación más corto para el programa llamado 'ESTIMACION_PATD'.

Siguiendo el esquema del algoritmo, el programa realiza una búsqueda de la frecuencia a la que se repiten los armónicos más significativos de la transformada del módulo de la señal recibida. Ésta será la estimación de la frecuencia recibida. Para realizar la búsqueda de un modo más óptimo se ha definido una frecuencia máxima y mínima para delimitarla, así como la precisión con la que realiza la búsqueda.

En una situación hipotética, se conocerá de ante mano cual es la frecuencia teórica del pulsar así como la velocidad máxima y mínima a la que la nave se desplazará, conociendo así entre que intervalos se moverá la frecuencia recibida.

10.6 SIMULACIONES OBTENIDAS

A partir de las simulaciones obtenidas con este programa se realizan los cálculos del sesgo del estimador y la covarianza del error. El programa que calcula las estadísticas del estimador es el llamado 'grafica', que además nos permite almacenar los datos obtenidos en un fichero llamado 'resultado.doc'.

10.6.1 Sesgo del estimador

A partir de los programas nombrados anteriormente obtenemos el siguiente gráfico del sesgo del estimador para diferentes SNR en el eje de coordenadas y para diferentes cantidades de periodos de integración.

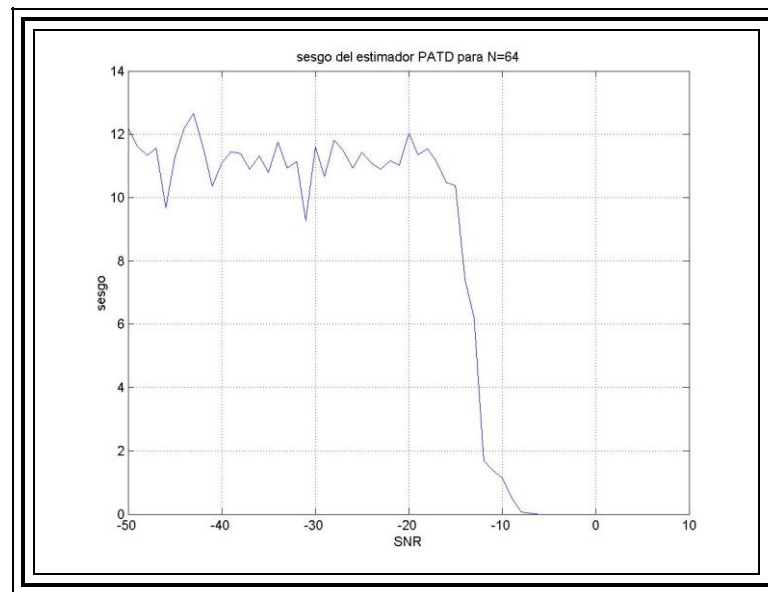


Ilustración 10.6: Sesgo de la estimación del PATD para N=64

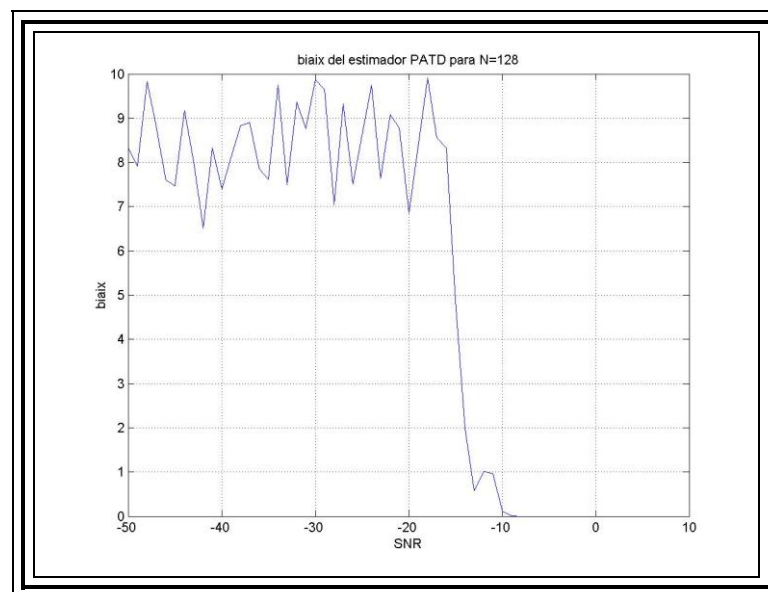


Ilustración 10.7: Sesgo de la estimación del PATD para N=128

Como se puede observar se obtienen tres áreas diferenciadas. La primera es la zona donde el algoritmo obtiene un sesgo cero, una vez supera la SNR umbral el sesgo aumenta hasta entrar en la zona de saturación. También se puede observar comparando los dos gráficos que la SNR umbral disminuye al aumentar el número de periodos de integración y que los valores máximos que se alcanzan en la zona de saturación disminuyen. Sin embargo, la zona de saturación no queda definida claramente, presentando picos. Así la zona operativa, tampoco queda del todo marcada siendo además ésta muy estrecha.

10.6.2 Covarianza del error

El siguiente gráfico muestra la covarianza del error para diferentes SNR en el eje de coordenadas y para diferentes periodos de integración.

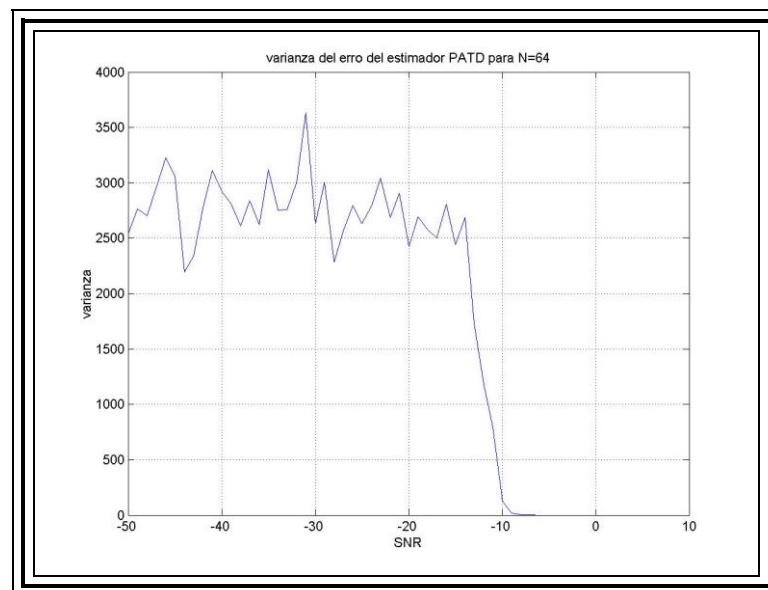


Ilustración 10.8: Varianza de la estimación del PATD para N=64

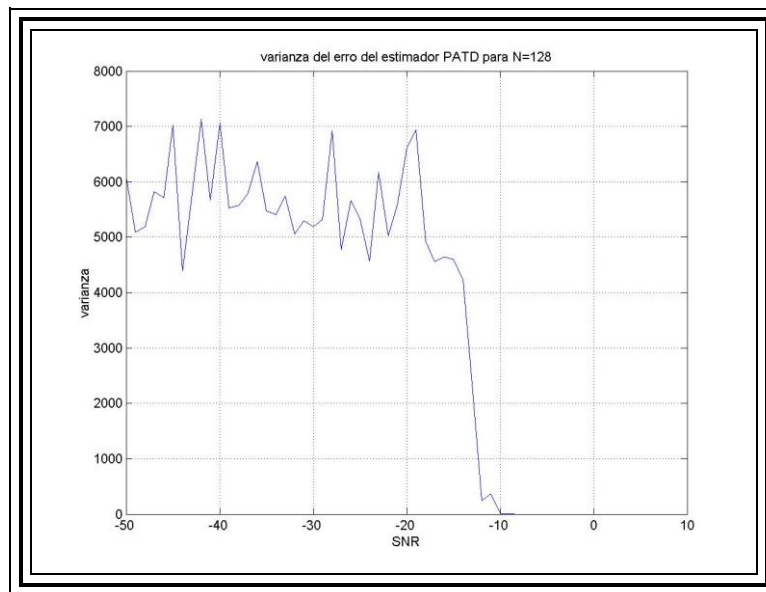


Ilustración 10.9: Varianza de la estimación del PATD para $N=128$

Como se puede observar se obtienen las tres áreas diferenciadas. La primera es la zona donde el algoritmo obtiene una varianza cero, una vez supera la SNR umbral la varianza aumenta hasta entrar en la zona de saturación. También se puede observar comparando los dos gráficos que la SNR umbral disminuye al aumentar el número de periodos de integración y que los valores máximos que se alcanzan en la zona de saturación aumentan. Sin embargo, la zona de saturación no queda del todo definida, presentando muchos picos y sin un valor constante. Así como la zona operativa es muy estrecha y fuera del SNR habitual (-50dB).

Por estas razones no quedan verificados los algoritmos del estimador de PATD debido a que no se ha conseguido una simulación óptima que permita realizar simulaciones con un número mayor de periodos de integración que permitirían obtener gráficos mucho más definidos y obtener así una información más fiable.

11 ANEXO B. CÓDIGO

11.1 Código utilizado en la estimación de la fase

11.1.1 Gen_perfil

```
function perfil=gen_perfil(Tp,Td,Pot)
%generador del perfil del pulsar en tension a partir de:
    %Tp: periodo de repeticion del pulsar
    %Td: duracion del pulso del pulsar
    %Pot: potencia de pico del pulsar

perfil=zeros(1,Tp);
x=0:1:Td-1;
perfil(1:Td)=sqrt(Pot)*gaussmf(x,[4 (Td/2)]);%perfil gaussiano del pulsar

%Mostrar el grafico de la señal
muestra=0:1:Tp-1;
plot(muestra,perfil);
grid
title(['perfil pulsar con Pot=', num2str(Pot)]);
xlabel('muestra');
ylabel('valor');
```

11.1.2 Gen_recibida

```
function y=gen_recibida(Tp,Td,Tr,perfil)
%genera la señal recibida debida al retardo a partir de:
    %Tr=retardo con que nos llega la señal pulsar
    %Tp=periodo de repeticion de la señal pulsar
    %Td=duracion del pulso del pulsar
    %perfil=perfil del pulsar

n=sqrt(0.5)*(randn(1,Tp)+j*randn(1,Tp));%genera ruido complejo de potencia unitaria
pulsar=perfil.*n;%perfil modulado con el ruido
for k=Tr+1:Tp %añade el retardo
    y(k)=pulsar(k-Tr);
end
for k=1:Tr
    y(k)=pulsar(k+Tp-Tr);
end
```

11.1.3 Sincronización_acumulada

```
function retardo=sincronizacion_acumulada(N,Tp,Td,Tr,SNR)
%busca el desfase acumulando periodos de la señal recibida a partir de:
    %N:numero de periodos acumulados
    %Tp:periodo del pulsar
    %Td:duracion del pulso del pulsar
    %Tr:desfase de la señal recibida
    %SNR:relacion señal a ruido del pulsar

% 1º Generar el modulo al cuadrado de la señal recibida acumulada
Pot=(Tp/Td)*(10^(SNR/10)); %calcula la potencia de pico a partir de la SNR
sum=zeros(1,Tp); %acumula las muestras de los N periodos
perfil=gen_perfil(Tp,Td,Pot); %genera un perfil de pulsar gaussiano en tension
for f=1:N %acumula N periodos del pulsar
    pulsar_recibida=gen_recibida(Tp,Td,Tr,perfil); %genera la señal pulsar recibida
    n=sqrt(0.5)*(randn(1,Tp)+j*randn(1,Tp));%genero el ruido aditivo
    recibida=pulsar_recibida+n; %sumo la señal pulsar recibida con el ruido aditivo
    modulo=abs(recibida).^2; %calculamos su modulo al cuadrado
    sum=sum+modulo;%acumulamos
end

%para ver la señal
%plot(sum)
%grid
%title(['señal acumulada con ',num2str(N), ' periodos acumulados ',num2str(SNR),'dB de SNR',' y
retardo,num2str(Tr)])
%xlabel('muestra');
%ylabel('valor');

% 2º Realizar la FFT
transformada_recibida=fft(sum); %realizamos la transformada discreta

% 3º Realizar la FFT del filtro
transformada_filtro=fft(perfil);

% 4ºmultiplicar el primer harmonico de las dos transformadas
fase=angle(conj(transformada_recibida(2))*transformada_filtro(2)); %extraemos la fase

% 5º Extraer el retardo de la fase
retardo=fase*(Tp)/(2*pi);%calculamos el retardo a partir de la fase
```

11.1.4 Gen_senal_recibida

```
function perfil=gen_senal_recibida(Tp,Td,Tr,SNR)
%generador de la señal recibida en tension a partir de:
    %Tp: periodo de repeticion del pulsar
    %Td: duracion del pulso del pulsar
    %Tr: retardo
    %SNR: SNR en dB

Pot=(Tp/Td)*(10^(SNR/10))
perfil=zeros(1,Tp);
x=0:1:Td-1;
perfil(1:Td)=sqrt(Pot)*gaussmf(x,[4 (Td/2)]); %perfil gaussiano del pulsar
recibida=zeros(1,3*Tp)
for i=0:1:2
    n=sqrt(0.5)*(randn(1,Tp)+j*randn(1,Tp)); %genero ruido complejo de potencia unitaria
    pulsar=perfil.*n
    %añado el retardo
    for k=Tr+1:Tp
        y(k)=pulsar(k-Tr);
    end
    for k=1:Tr
        y(k)=pulsar(k+Tp-Tr);
    end
    noise=sqrt(0.5)*(randn(1,Tp)+j*randn(1,Tp));
    total=y+noise
    recibida((i*Tp)+1:(i+1)*Tp)=total;%perfil modulado con el ruido
end

recibida=abs(recibida);

%para ver el grafico de la señal
muestra=0:1:(3*Tp)-1
plot(muestra,recibida);
grid
title(['señal recibida con ruido aditivo a SNR=', num2str(SNR),'dB']);
xlabel('muestra');
ylabel('valor');
```

11.1.5 Verificacion_gausiana

```
function verificacion_gausiana(N,Tp,Td,Tr,SNR)
%verifica que la señal acumulada se comporta como una señal gaussiana

%1ºcalcular la señal acumulada
Pot=(Tp/Td)*(10^(SNR/10)); %calcula la potencia de pico a partir de la SNR
sum=zeros(1,Tp); %acumulara las muestras de los N periodos
perfil=gen_perfil(Tp,Td,Pot); %genera un perfil de pulsar en tension para la señal recibida
for f=1:N %acumula n periodos del pulsar
    pulsar_recibida=gen_recibida(Tp,Td,Tr,perfil); %genera la señal pulsar recibida
    n=sqrt(0.5)*(randn(1,Tp)+j*randn(1,Tp)); %genera el ruido
    recibida=pulsar_recibida+n; %suma la señal pulsar recibida con el ruido
    modulo=abs(recibida).^2; %calcula su modulo al cuadrado
    sum=sum+modulo;
end

%2ºcomprueba que se comporta como una gaussiana
muestra=0:1:Tp-1;
close
qqplot(sum)
grid
title(['estadística acumulada con ',num2str(N), ' periodos acumulados y ', num2str(SNR) ',dB de
      SNR'])
```

11.1.6 Verificacion_estadisticas

```
function verificacion_estadisticas(N,Tp,Td,Tr,SNR)
%verifica que la señal real tenga la misma media y varianza que las %calculadas teoricamente

%1°calcula la potencia de pico y perfil
muestra=0:1:Tp-1; %eje de las coordenadas
Pot=(Tp/Td)*(10^(SNR/10)); %calcula la potencia de pico a partir de la SNR
perfil=gen_perfil(Tp,Td,Pot); %genera un perfil de pulsar en tension

%2°calcula estadísticas reales de la señal acumulada
for h=1:250 %calcula señales reales acumuladas
    sum=zeros(1,Tp); %vector donde suma las muestras de los N periodos
    for f=1:N %acumula n periodos del pulsar
        pulsar_recibida=gen_recibida(Tp,Td,Tr,perfil); %genera la señal pulsar recibida
        n=sqrt(0.5)*(randn(1,Tp)+j*randn(1,Tp)); %genera el ruido
        recibida=pulsar_recibida+n; %suma la señal pulsar recibida con el ruido
        modulo=abs(recibida).^2; %calcula su modulo al cuadrado
        sum=sum+modulo;
    end
    recibidas(h,:)=sum; %guarda las señales reales por filas
end
media_real=mean(recibidas); %calcula la media real
varianza_real=var(recibidas); %calcula la varianza real

%3°calcula las estadísticas teóricas
varianza=perfil.^2;
media_teorica=N*(varianza'+1); %calcula la media de la señal recibida acumulada
```

11.1.7 Sincronizacion_generada

```

function retardo=sincronizacion_generada(N,Tp,Td,Tr,SNR)
%busca el desfase generando la señal ya acumulada
    %N:numero de periodos
    %Tp: duracion del periodo del pulsar
    %Td: duracion del pulsar
    %Tr: desfase de la señal recibida
    %SNR: relacion señal a ruido del pulsar

% 1º Generar el modulo al cuadrado de la señal recibida acumulada
Pot=(Tp/Td)*(10^(SNR/10));%calcula la potencia de pico a partir de la SNR
perfil=gen_perfil(Tp,Td,Pot); %genera un perfil de pulsar en tension para la señal recibida
%añade el retardo al perfil
for k=Tr+1:Tp
    perfil_recibida(k)=perfil(k-Tr);
end
for k=1:Tr
    perfil_recibida(k)=perfil(k+Tp-Tr);
end
perfil_pot=perfil_recibida.^2;
media_teorica=N*(perfil_pot+1);%calcula la media de la señal recibida acumulada
varianza_teorica=N*((perfil_pot+1).^2);%calcula la varianza de la señal recibida
%calcula la señal recibida acumulada a partir de la media y la variancia teoricas
recibida_generada=media_teorica + sqrt(varianza_teorica).*randn(1,Tp);%*randn(Tp);

% para ver la señal
%plot(recibida_generada)
%grid
%title(['señal generada con ',num2str(N), ' periodos acumulados ',num2str(SNR),'dB de SNR',' y
retardo,num2str(Tr)])
% xlabel('muestra');
% ylabel('valor');

% 2º Realizar la FFT
transformada_recibida=fft(recibida_generada); %realizamos la transformada discreta

% 3º Realizar la FFT del filtro que en este caso es el perfil de la señal acumulada sin ruido
transformada_filtro=fft(perfil);

% 4º multiplicar el primer harmonico de las dos transformadas
fase=angle(conj(transformada_recibida(2))*transformada_filtro(2));%extraemos la fase

% 5º Extraer el retardo de la fase
retardo=fase*(Tp)/(2*pi);%calculamos el retardo a partir de la fase

```

11.1.8 Verificacion_generada

```
function verificacion_generada(N,Tp,Td,Tr,SNR)
%verifica que la señal acumulada y la generada tienen la misma estadística

%1ºcalcular la señal acumulada
Pot=(Tp/Td)*(10^(SNR/10)); %calcula la potencia de pico a partir de la SNR
sum=zeros(1,Tp); %acumula las muestras de los N periodos
perfil=gen_perfil(Tp,Td,Pot); %genera un perfil de pulsar en tensión para la señal recibida
for f=1:N %acumula n periodos del pulsar
    pulsar_recibida=gen_recibida(Tp,Td,Tr,perfil); %genera la señal pulsar recibida
    n=sqrt(0.5)*(randn(1,Tp)+j*randn(1,Tp)); %genera el ruido
    recibida=pulsar_recibida+n; %suma la señal pulsar recibida con el ruido
    modulo=abs(recibida).^2; %calcula su módulo al cuadrado
    sum=sum+modulo;
end

%2ºcalcular la señal generada
varianza=perfil.^2;
media_recibida=N*(varianza+1); %calcula la media de la señal recibida acumulada
varianza_recibida=N*((varianza+1).^2); %calcula la varianza de la señal recibida
%calcula la señal recibida acumulada a partir de la media y la variancia teóricas
recibida_generada=media_recibida+sqrt(varianza_recibida).*randn(1,Tp);

%3ºcomprobar que tienen la misma estadística
muestra=0:1:Tp-1;
close
qqplot(sum,recibida_generada)
grid
title(['estadística acumulada con ',num2str(N), ' periodos acumulados y ',num2str(SNR),'dB de SNR'])
```


11.1.9 Verificacion

```
function verificacion(N,Tp,Td,Tr,SNR)
%verifica que la señal acumulada y la generada tienen la misma apariencia

%1ºcalcular la señal acumulada
Pot=(Tp/Td)*(10^(SNR/10));%calcula la potencia de pico a partir de la SNR
sum=zeros(1,Tp);%acumula las muestras de los N periodos
perfil=gen_perfil(Tp,Td,Pot); %genera un perfil de pulsar en tension para la señal recibida
for f=1:N %acumula n periodos del pulsar
    pulsar_recibida=gen_recibida(Tp,Td,Tr,perfil); %genera la señal pulsar recibida
    n=sqrt(0.5)*(randn(1,Tp)+j*randn(1,Tp));%genera el ruido
    recibida=pulsar_recibida+n; %suma la señal pulsar recibida con el ruido
    modulo=abs(recibida).^2; %calcula su modulo al cuadrado
    sum=sum+modulo;
end

%2ªcalcular la señal generada
varianza=perfil.^2;
media_recibida=N*(varianza+1); %calcula la media de la señal recibida acumulada
varianza_recibida=N*((varianza+1).^2); %calcula la varianza de la señal recibida
%calcula la señal recibida acumulada a partir de la media y la variancia teoricas
recibida_generada=media_recibida+sqrt(varianza_recibida).*randn(1,Tp);

%3ºcomprovar que tienen la misma apariencia
muestra=0:1:Tp-1;
close
plot(muestra,sum,muestra,recibida_generada)
grid
title(['señal real y sintetica con ', num2str(N),' periodos acumulados y ',num2str(SNR),' dB de SNR']);
gtext('acumulada');
gtext('generada');
```

11.1.10 Calculo_sesgo

```
function sesgo=calculo_sesgo(N,Tr,SNR,tipo)
%calcula el sesgo del estimador
%u: numero de realizaciones

%1º genera el vector con los retardos encontrados para una misma SNR
switch tipo
case 'acumulada',
    for u=1:5000
        retardos(u)=sincronizacion_acumulada(N,50,20,Tr,SNR);
    end

case 'generada',
    for u=1:5000
        retardos(u)=sincronizacion_generada(N,50,20,Tr,SNR);
    end

otherwise
    disp('error al definir el tipo de señal');
    return;
end

%2ºcalcula el sesgo
esperanza=mean(retardos);
sesgo=abs(esperanza-Tr);
```

11.1.11 Grafica_sesgo

```

function grafica_sesgo(N,Tr,tipo)

%generar los puntos del grafico
snr=-60:0.05:-45; %eje de las coordenadas
switch tipo
case 'acumulada',
    %genera eje Y
    for h=1:61
        biaixs_acumulada(h)=calculo_sesgo(N,Tr,snr(h),'acumulada'); %eje de abscisas
    end
    %dibujar
    close
    plot(snr,biaixs_acumulada)
    grid
    title(['sesgo del estimador para N=',num2str(N)]);
    xlabel('SNR');
    ylabel('SESGO');
    return;

case 'generada',
    %genera eje Y
    for h=1:301
        biaixs_generada(h)=calculo_sesgo(N,Tr,snr(h),'generada'); %eje de abscisas
    end
    %dibujar
    close
    plot(snr,biaixs_generada)
    grid
    title(['sesgo del estimador para N=',num2str(N)]);
    xlabel('SNR');
    ylabel('SESGO');
    return;

otherwise
    disp('error al definir el tipo de señal');
    return;
end

```

11.1.12 Grafica_sesgo_multiple

```
function grafica_sesgo_multiple(N,Tr,tipo)

%generar los puntos del grafico
snr=-15:-0.5:-70; %eje de las coordenadas
switch tipo
    case 'acumulada',
        %genero eje Y
        for h=1:61
            sesgos_acumulada(h)=calculo_sesgo(N,Tr,snr(h),'acumulada'); %eje de abcisas
        end

        %dibujar
        close
        plot(snr,sesgo_acumulada)
        grid
        title(['sesgo del estimador para N=',num2str(N)]);
        xlabel('SNR');
        ylabel('SESGO');
        return;

    case 'generada',
        n(3)=N %genero eje Y
        n(2)=N/100
        n(1)=N/10000
        for j=1:1:3
            for h=1:111
                sesgos_generada(h)=calculo_sesgo(n(j),Tr,snr(h),'generada'); %eje de abcisas
            end
            grafica(j,:)=sesgos_generada
        end

        %dibujar
        close
        plot(snr,grafica(1,:),snr,grafica(2,:),snr,grafica(3,:))
        grid
        title(['sesgo del estimador para N=',num2str(n(1)),',',num2str(n(2)),',',num2str(n(3))]);
        xlabel('SNR');
        ylabel('SESGO');
        return;

    otherwise
        disp('error al definir el tipo de señal');
        return;
end
```

11.1.13 Calculo_varianza

```

function varianza=calculo_varianza(N,Tr,SNR,tipo)
%calcula la varianza del estimador

%1º genera el vector con los retardos encontrados para una misma SNR
switch tipo
    case 'acumulada',
        for u=1:50000
            retardos(u)=sincronizacion_acumulada(N,50,20,Tr,SNR);
        end

    case 'generada',
        for u=1:50000
            retardos(u)=sincronizacion_generada(N,50,20,Tr,SNR);
        end

    otherwise
        disp('error al definir el tipo de señal');
        return;
end

%2ºcalcula la varianza
f=retardos-Tr;
varianza=mean(f.^2);

```

11.1.14 Grafica_varianza

```

function grafica_varianza(N,Tr)
%dibuja la varianza

%generar los puntos del grafico
snr=-60:1:-10; %eje de las coordenadas
for h=1:51
    varianza_generada(h)=calculo_varianza(N,Tr,snr(h),'generada'); %eje de abscisas
end

%dibujar
close
semilogy(snr,varianza_generada)
grid
title(['varianza de la señal generada con',num2str(N),' periodos acumulados']);
xlabel('SNR');
ylabel('varianza');

```

11.1.15 Grafica_varianza_multiple

```
function grafica_varianza_multiple(N,Tr,tipo)

%generar los puntos del grafico
snr=-15:-0.5:-70; %eje de las coordenadas
switch tipo
case 'acumulada',
    %genero eje Y
    for h=1:61
        varianza_acumulada(h)=calculo_varianza(N,Tr,snr(h),'acumulada'); %eje de abcisas
    end
    %dibujar
    close
    plot(snr,varianza_acumulada)
    grid
    title(['varianza de la señal acumulada para N=',num2str(N)]);
    xlabel('SNR');
    ylabel('varianza');
    return;

case 'generada',
    %genero eje Y
    n(3)=N
    n(2)=N/100
    n(1)=N/10000
    for j=1:1:3
        for h=1:111
            varianza_generada(h)=calculo_varianza(n(j),Tr,snr(h),'generada'); %eje de abscisas
        end
        grafica(j,:)=varianza_generada
    end

    %dibujar
    close
    plot(snr,grafica(1,:),snr,grafica(2,:),snr,grafica(3,:))
    grid
    title(['varianza del error para la señal generada para N=', num2str(n(1)), ',', num2str(n(2)), ',',
        num2str(n(3))]);
    xlabel('SNR');
    ylabel('varianza');
    return;

otherwise
    disp('error al definir el tipo de señal');
    return;
end
```

11.2 Código utilizado en la estimación del PATD

11.2.1 Estimacion_PATD

```
function [est_dT]=ESTIMACION_PATD(N,Tp,Td,dT,SNR)
%busca la desviacion en frecuencia (dT) de la señal recibida a partir de:
    %N: numero de periodos acumulados
    %Tp: duracion del periodo del pulsar
    %Td: duracion del pulso del pulsar
    %SNR: relacion señal a ruido del pulsar

try
    %1: calcula algunas variables que varían debido a la deriva
    Tpatd=Tp+dT; %periodo recibido debido al efecto Doppler
    Ninterp=N/2; %numero de periodos necesarios con interpolacion
    Np=ceil(Ninterp*Tp/Tpatd); %numero de periodos de la señal PATD necesarios para
    %mismo numero de muestras que sin PATD
    acum_1=zeros(1,N*Tp); %Reserva memoria para la matriz
    %2ºGeneraa el perfil de la señal
    Pot=(Tp/Td)*(10^(SNR/10)); %calcula la potencia de pico a partir de la SNR
    perfil=gen_perfil(Tpatd,Td,Pot); %genera un perfil de pulsar gaussiano en tension
    %3: genera el modulo al cuadrado de la señal recibida
    for w=1:1:Np/8
        ruido=0.7071*(randn(1,8*Tpatd)+j*randn(1,8*Tpatd)); %genera el ruido de ocho
        %periodos
        for s=1:1:8
            modulacion_perfil=0.7071*(randn(1,Tpatd)+j*randn(1,Tpatd)); %genera ruido
            %complejo de
            %potencia unitaria
            pulsar=perfil.*modulacion_perfil; %perfil modulado con el ruido
            recibida=pulsar+ruido((s-1)*Tpatd+1:s*Tpatd); %sumo la señal pulsar recibida
            %con el ruido
            n=(w-1)*8+s; %calcula el periodo que estoy generando
            acum_1(((n-1)*Tpatd)+1:n*Tpatd)=abs(recibida).^2; %calculamos su modulo al
            %cuadrado de
            %cada componente y lo
        end
    end
    %guardo
    acum_1=acum_1(1:Ninterp*Tp); %coge las muestras con el periodo teorico
    %4: interpolo para conseguir mas resolucion y transformo la señal recibida
    acum_1=interp(acum_1,2);
    acum_1=abs(fft(acum_1)).^2;
    %5 busca la f que me maximiza la metrica
    Fmin=round(N*Tp/(Tp+abs(dT))); %calculo la f cuando el patd es positivo y le sumo
    %un margen
    Fmax=round(N*Tp/(Tp-abs(dT))); %calculo la f cuando el patd es negativo y le
    %sumo un margen
```

```
Fmin=round((0.75)*Fmin);
Fmax=round((1.25)*Fmax);
maximo=0;
for F=Fmin:1:Fmax
    suma=0;
    for k=0:1:round(Tp/Td)-1
        suma=suma+(acum_1(k*F+1));
    end
    if suma>maximo
        maximo=suma;
        Festimada=F;
    end
end
%6: Extrae el periodo estimado a partir de la frecuencia estimada
est_Tpatd=N*Tp/(Festimada); %calcula el periodo estimado
est_dT=est_Tpatd-Tp; %a partir del periodo teorico calculo la deriva estimada
catch
    lasterr
end
```


11.2.2 Estimacion_nueva

```

function [est_dT]=estimacion_nueva(N,Tp,Td,dT,SNR,k)
%busca la desviacion en frecuencia (dT) de la señal recibida a partir de:
    %N:numero de periodos acumulados
    %Tp: duracion del periodo teorico del pulsar
    %Td: duracion del pulso del pulsar
    %dT: deriva del periodo
    %SNR: relacion señal a ruido del pulsar
    %K: parametro de zero-padding

try
    acum=zeros(1,(k+1)*N*Tp); %1º: Reserva memoria para el vector de almacén de
    las muestras
    %2º: calculo del periodo recibido.
    Tpatd=Tp+dT; %periodo recibido debido al efecto Doppler

    %3ºGenerar el perfil de la señal a partir de la potencia de pico
    Pot=(Tpatd/Td)*(10^(SNR/10)); %calcula la potencia de pico a partir de la SNR
    %genera un perfil de pulsar gaussiano en tension
    perfil=zeros(1,Tpatd);
    x=0:1:Td-1;
    perfil(1:Td)=sqrt(Pot)*gaussmf(x,[4 ((Td-1)/2)]); %perfil gaussiano del pulsar

    %4ºgenerar el modulo al cuadrado de la señal recibida
    for w=1:1:ceil(N/8) %calcula el ruido de ocho en ocho periodos
        %genera el ruido de ocho periodos
        ruido=0.7071*(randn(1,8*Tpatd)+j*randn(1,8*Tpatd));
        for s=1:1:8 %calcula el modulo al cuadrado de la señal recibida durante ocho
        periodos
            %genera ruido complejo de potencia unitaria que modelara el perfil
            modulacion_perfil=0.7071*(randn(1,Tpatd)+j*randn(1,Tpatd));
            %perfil modulado con el ruido complejo de potencia unitaria
            pulsar=perfil.*modulacion_perfil;
            %suma la señal pulsar recibida con el ruido
            recibida=pulsar+ruido((s-1)*Tpatd+1:s*Tpatd);
            n=(w-1)*8+s; %calcula el periodo que estoy generando
            %calcula su modulo al cuadrado de cada componente y lo guardamos en
        acum
            acum(((n-1)*Tpatd)+1:n*Tpatd)=abs(recibida).^2;
        end
    end

    %5ºCalcular la transformada de la señal recibida
    acum=acum(1:N*Tp); %seleccionar las muestras con el periodo teorico
    %añade tantos ceros como muestras tiene la señal para conseguir mas resolucion
    %frecuencial y detectar mejor el periodo
    acum(N*Tp+1:(k+1)*N*Tp)=zeros(1,k*N*Tp);
    %acum=interp(acum,2); %interpolan para conseguir mas resolucion
    acum=abs(fft(acum)).^2; %transformar la señal recibida

```

```

%6ºObtener las frecuencias que rastreamos
muestras=length(acum) %numero de muestras de la transformada
%definir la frecuencia minima
Fmin=3;
%definir la frecuencia maxima a partir del numero de muestras que
%se han obtenido y del numero de picos que sumamos para obtener el
%maximo
Fmax=floor((muestras-1)/(round(Tp/Td)-1))

%7ºEstimar la frecuencia
maximo=0; %inicializa el maximo
%rastrea todas las frecuencias desde la minima a la maxima
for F=Fmin:1:Fmax
suma=0; %inicializa la suma
%para todos los picos
for p=0:1:round(Tp/Td)-1
%suma los picos
suma=suma+(acum(p*F+1));
end
%si la suma es mayor que el maximo, ese sera el maximo
if suma>maximo
%obtener el nuevo maximo
maximo=suma;
%obtener la nueva frecuencia estimada
Festimada=F;
end
end

%8ºExtraer la estimacion de la deriva del periodo a partir de la frecuencia estimada
%calcular el periodo estimado teniendo en cuenta la interpolacion
est_Tpatd=muestras/Festimada;
%obtener la estimacion de la deriva del periodo
est_dT=est_Tpatd-Tp;

catch

lasterr

end

```

11.2.3 Grafica

```
function grafica(N,dT,k)

diary historia_comandos.txt %guarda sesion y copia salidas

try
    %1º generar los puntos del grafico
    snr=10:-1:-50; %eje de las coordenadas
    %2º genera eje Y
    biaix=zeros(1,61);
    varianzas=zeros(1,61);
    derivas=zeros(1,5000);
    for h=1:61
        for u=1:5000
            derivas(u)=estimacion_nueva(N,31,6,dT,snr(h),k);
        end
        %calcula el biaix
        esperanza=mean(derivas);
        biaix(h)=abs(esperanza-dT);
        %calcula la varianza
        f=derivas-dT;
        varianzas(h)=mean(f.^2);
    end

    %3º guarda los resultados en un fichero
    [f1]=fopen('resultado.doc','w');%abro el fichero

    if f1== -1
        message=ferror(f1); %si da un error sale del programa
        disp(message);
        exit
    end

    %guarda las snr
    h=1;
    fprintf(f1,'para una snr: %f\n', snr(h) );
    for h=2:61
        fprintf(f1,'%f\n', snr(h) );
    end
    fprintf(f1,'\n');

    %guarda el biaix
    h=1;
    fprintf(f1,'el biaix es:%f\n', biaix(h) );
    for h=2:61
        fprintf(f1,'%f\n', biaix(h) );
    end
    %guardo la varianza
    h=1;
```

```
%imprime las variables utilizadas en la simulación
fprintf(f1,'variables:\n');
fprintf(f1,'periodo teorico Tp=%d\n',50);
fprintf(f1,'duracion del pulso Td=%d\n',20);
fprintf(f1,'desfase Tr=0\n');
fprintf(f1,'doppler dT=%d\n',dT);
fprintf(f1,'numero de periodos teoricos N=%d\n',N);

st=fclose(f1); %cierra el fichero

if f1==-1
    message=ferror(f1); %si me da un error salgo del programa
    disp(message);
    exit
end

diary off %suspende la ejecucion de diary para poder acceder al fichero historia_comandos.txt
exit %sale de matlab

catch

    lasterr
    diary off
    exit

end
```

12 REFERENCIAS

- [1]. www.xtec.es/~rmolins1/univers/es/quapul00.htm (Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya)
- [2]. "Enciclopedia Larousse", Tomo 16, Editorial Planeta, 1984
- [3]. Suneel I. Sheikh, Darryll J. Pines, Paul S. Ray, Kent S. Wood, Michael N. Lovellette, Michael T. Wolf, "The use of X-ray pulsars for spacecraft navigation", AAS 04-109.
- [4]. Josep Sala, Andreu Urruela, Xavier Villares, Robert Estalella, Josep M. Paredes "Feasibility Study for a Spacecraft Navigation System relying on Pulsar Timing Information", Ariadna Study 03/4202 (Final Report) June 28, 2004
- [5]. http://www.ajax.ehu.es/VEX/Home/Venus_Express.jpg (Grupo de Ciencias Planetarias, Universidad del País Vasco)
- [6]. www-news.uchicago.edu/releases/photos/argos/argos.jpg (The University of Chicago: news office)
- [7]. Andrew G. Lyne, Francis Graham-Smith "Pulsar Astronomy" Cambridge University Press, Second Edition.
- [8]. http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/wwwdev/Education_page.html 'Australia Telescope National Facility (ATNF) administrado por el CSIRO'
- [9]. www.xtec.es/recursos/astronom/chandra/indexs.htm 'Observatorio Chandra de rayos X, NASA'
- [10]. A. G. Lyne, "Pulsars as clocks", European Frequency Time Forum, 5-7 March 1996 Conference Publication No 418 IEE 1996.
- [11]. www.astronomiaonline.com
- [12]. www.jb.man.ac.uk/~pulsar/tutorial/tut/node48.html 'Jodrell Bank Observatory, University of Manchester'
- [13]. "Enciclopedia Larousse", Tomo 12, Editorial Planeta, 1984
- [14]. <http://www.galeon.com/casanchi/ast/coorde1.htm> (tipos de coordenadas)
- [15]. <http://www.mallorcaweb.net/masm/siscoo.htm> (tipos de coordenadas)
- [16]. www.astromia.com 'Astronomía Educativa'

- [17]. Joseph H. Taylor, Jr, "Millisecond Pulsars: Nature's Most Stable Clocks", Proceedings of the IEEE, vol. 79, No 7, JULY 1991
- [18]. A.G. Lyne, R. T. Ritchings, F. G. Smith, "The period derivatives of pulsars", Communicated by the Director, Nuffield Radio Astronomy Laboratories, Received 1974 December 16. Royal Astronomical Society. Provided by the NASA Astrophysics Data System.
- [19]. www.electronica2000.com/dic_elec/a.htm (Diccionario de Electrónica)
- [20]. <http://www.wikipedia.es> (Enciclopedia Digital)
- [21]. www.jb.man.ac.uk (The University of Manchester: Jodrell Bank Observatory)
- [22]. <http://www.com.uvigo.es/assignaturas/scvs/trabajos/curso9900/Propagacion/.htm> (Universidad de Vigo, Grupo de Comunicaciones)
- [23]. <http://radioastronomia.iespana.es> (Libro de Radioastronomía)
- [24]. http://ar.geocities.com/seti_argentina/radiobasico/radiobasica.html
- [25]. <http://www.ucm.es/info/gioq/investigacion/temas/polarizacionvisibilidad.doc> (Universidad Complutense de Madrid)
- [26]. José B. Mariño, Francesc Vallverdú, José A. Rodríguez, Asunción Moreno, "Tratamiento digital de la señal", Una introducción experimental, Edicions UPC (Junio del 1999)
- [27]. Michel C. Jeruchin, Philip Balaban, K. Sam Shanmugan, "Simulation of Communication Systems", Modeling, Methodology and Techniques, Kluwer Academic/Plenum Publishers, Second Edition
- [28]. <http://biblioteca.upc.es> (Biblioteca técnica de la Universitat Politècnica de Catalunya)
- [29]. <http://www.eie.fceia.unr.edu.ar> (Escuela de Ingeniería Electrónica. Universidad Nacional de Rosario)
- [30]. <http://www.seh-lilha.org/maxverosim.htm> (Alce ingeniería. Bioestadística)
- [31]. <http://www.scielo.cl/scielo.php> (SciELO: Scientific Electronic Library Online)



- [32]. http://campusvirtual.uma.es/est_fisio/apuntes/ Universidad de Málaga. Bioestadística: Métodos y Aplicaciones)
- [33]. www.labmat.puc.cl (Universidad Católica de Chile. Estadística para la construcción civil)
- [34]. <http://www.dm.uba.ar> (Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires – Argentina)
- [35] Michel C. Jeruchin, Philip Balaban, K. Sam Shanmugan, “Simulation of Communication Systems”, Modeling, Methodology and Techniques, Kluwer Academic/Plenum Publishers, Second Edition
- [36] Athanasios Papoulis, “Probability, Random Variables, and Stochastic Processes”, McGraw-Hill International Editions, Electrical & Electronic Engineering Series, Third Edition (1991)
- [37]. <http://www.cmat.edu.uy> (Universidad de la República de Uruguay, Centro de Matemática)
- [38] <http://www.diesl.com> (Televisión digital y satélite)

